S-5-5

Hyperlisp のデータ構造とオートマトン

東京大学理学部情報科学科
佐藤雅彦

Hyperlisp およびその data structure については，すでに何度か報告を行う機会があったが，数学的性質に関しては証明を省いてきたので，ここでは証明をつけて，とくに automaton との関係を詳しく論じることにする。

§1 S_∞

$\mathfrak{2} = \{0, 1\}$ を二元体 $GF(2)$, $W = \{I, O\}^*$ を二文字 I, O 上の free monoid とし，

$$S_\infty = Map(W, \mathfrak{2}) = \{ s \mid s : W \to \mathfrak{2} \}$$

とおく。

以下では，文字 r, s, t は S_∞ の元を表わし，u, v, w 等は W の元を表わすとする。また，$r \in S_\infty$ のとき $r(w)$ のことを (r, w) で表わす。

S_∞ の元は対応

$$\begin{array}{ccc} S_\infty & & \mathcal{P}(W) \\ \cup & & \cup \\ r & \longleftrightarrow & \mathrm{supp}\, r = \{ w \in W \mid (r, w) = 1 \} \end{array}$$

によって，自然に $\mathcal{P}(W)$ の元 [i.e., W 上の language] と同一視される。

S_∞ に和，積を次のように定める。

$$(r+s, w) = (r, w) + (s, w)$$
$$(rs, w) = \sum_{w=uv} (r, u)(s, v)$$

積が well-defined になることは，w の uv への分解が $|w|+1$ 通りしかないことから確かめられる。

Th 1 $S_\infty = \langle S_\infty ; +, \cdot, 0, 1, - \rangle$ は（非可換）環になる。

ただし，

$$(0, w) = 0$$
$$(1, w) = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad w = 1 \quad (W \text{ の単位元}) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$-r = r$

証明は機械的にできるので略する。

Remark $\mathfrak{R}$ および W は次のようにして、演算を保ちながら S_∞ に埋め込まれる。

$$\mathfrak{R} \ni 0, 1 \longmapsto 0, 1 \in S_\infty$$

$$W \ni w \longmapsto \overline{w} \in S_\infty \quad \text{s.t.} \quad (\overline{w}, u) = \begin{cases} 1 & \text{if } w = u \\ 0 & \text{if } w \neq u \end{cases}$$

以下では、$\overline{w} \in S_\infty$ を w で表わす。

さて、S_∞ は体 $\mathfrak{R}$ 上の線型空間になり、

$$\begin{array}{rccc} \pi : & S_\infty & \longrightarrow & S_\infty \\ & \cup\!\!\!\!\!\ \text{\rotatebox{90}{$\in$}} & & \cup\!\!\!\!\!\ \text{\rotatebox{90}{$\in$}} \\ & r & \longmapsto & (r, 1) \end{array}$$

は S_∞ の linear transformation (endomorphism) を定める。$\pi^2 = \pi$ だから π は projection になり、直和分解

(1) $$S_\infty = \mathrm{Im}\,\pi \oplus \mathrm{Ker}\,\pi$$

を得る。$\mathrm{Im}\,\pi = \mathfrak{R}$ だから、

$$M_\infty = \mathrm{Ker}\,\pi = \{ r \in S_\infty \mid (r, 1) = 0 \}$$

とおけば、

$$S_\infty = \mathfrak{R} \oplus M_\infty \qquad [\text{線型空間として}]$$

となる。これは、set theoretic には、$S_\infty = M_\infty \oplus (1 + M_\infty)$ (直和) となる。ここで $1 + M_\infty = \{ 1 + r \mid r \in M_\infty \}$ であるが、これを A_∞ で表わす。M_∞ の元を <u>molecule</u> とよび、A_∞ の元を <u>atom</u> とよぶ。

次に、free monoid W の S_∞ への右からの作用 $\delta : S_\infty \times W \longrightarrow S_\infty$ を

$$(\delta(r,u),v) = (r,uv)$$

と定める。実際，簡単な計算で

$$\delta(r,1) = r$$
$$\delta(\delta(r,u),v) = \delta(r,uv)$$

となることがわかるので，δ は W の S_∞ への作用になる。$w \in W$ を固定すれば

$$\delta(-,w) : S_\infty \longrightarrow S_\infty$$

は linear transformation になる。とくに，$car, cdr : S_\infty \to S_\infty$ を

$$car(r) = \delta(r,\mathrm{I}) , \quad cdr(r) = \delta(r,\square)$$

と定める。このとき，次の公式が成立する。

<u>Prop 2</u> $car(st) = car(s)t + \pi(s)car(t)$
$cdr(st) = cdr(s)t + \pi(s)cdr(t)$

$\because)$

$$\begin{aligned}(car(st),w) &= (\delta(st,\mathrm{I}),w) \\ &= (st,\mathrm{I}w) \\ &= \textstyle\sum_{uv=\mathrm{I}w}(s,u)(t,v) \\ &= (s,1)(t,\mathrm{I}w) + \textstyle\sum_{\mathrm{I}uv=\mathrm{I}w}(s,\mathrm{I}u)(t,v) \\ &= \pi(s)(car(t),w) + \textstyle\sum_{uv=w}(car(s),u)(t,v) \\ &= (\pi(s)car(t),w) + (car(s)t,w) \\ &= (\pi(s)car(t) + car(s)t, w)\end{aligned}$$

したがって $car(st) = \pi(s)car(t) + car(s)t$. cdr も同様. ∎

また，簡単な計算で，$car(\mathrm{I}) = 1$，$cdr(\mathrm{I}) = 0$，$cdr(\mathrm{I}) = 0$，$cdr(\square) = 1$ となることに注意しておく。

次に，S_∞ を right S_∞-module とみなせば，M_∞ はその submodule になる。このとき次が成立する。

<u>Th 3</u> $\langle I, \square \rangle$ は M_∞ の basis

∵) (1) $r \in M_\infty \Rightarrow r = I\,car(r) + \square\,cdr(r)$

☺ $(I\,car(r) + \square\,cdr(r), 1) = (I\,car(r), 1) + (\square\,cdr(r), 1)$

$= (I,1)(car(r),1) + (\square,1)(cdr(r),1) = 0$ ($\because$ $(I,1) = (\square,1) = 0$)

一方, $r \in M_\infty$ だから $(r,1) = 0$

$(I\,car(r) + \square\,cdr(r), Iw) = (car(I\,car(r) + \square\,cdr(r)), w)$

$= (car(I\,car(r)) + car(\square\,cdr(r)), w)$

$= (car(I)\,car(r) + \pi(I)\,car(car(r)) + car(\square)\,cdr(r) + \pi(\square)\,car(cdr(r)), w)$

$= (car(r), w)$

一方 $(r, Iw) = (car(r), w)$

同様に $(I\,car(r) + \square\,cdr(r), \square w) = (r, \square w)$

1 たがって, $r = I\,car(r) + \square\,cdr(r)$

(2) $Is + \square t = 0 \Rightarrow s = t = 0$

☺ $car(Is + \square t) = car(Is) + car(\square t) = car(I)s + \pi(I)car(s) + car(\square)t$

$+ \pi(\square)car(t) = s$ $\therefore s = 0$ 同様に $t = 0$ ■

この定理により, right-S_∞-module の同型

(2) $$\theta : S_\infty \oplus S_\infty \cong M_\infty$$

$$\langle s, t \rangle \longmapsto Is + \square t$$

$$\langle car(r), cdr(r) \rangle \longleftarrow r$$

$\rho : M_\infty \to M_\infty$

$r \mapsto I\,car(r)$

$\Rightarrow \rho^2 = \rho$

$\mathrm{Ker}\,\rho = I S_\infty$

$\mathrm{Im}\,\rho = \square S_\infty$

が従う。以下では θ を cons で表わす。即ち

$$cons(s, t) = Is + \square t$$

また, bijection $snoc : S_\infty \times S_\infty \longrightarrow A_\infty$ を

$$snoc(s, t) = cons(s, t) + 1$$

と定める。(1), (2) を合わせて, set theoretic な同型

$$S_\infty \simeq \mathfrak{L} \times S_\infty \times S_\infty$$

$$r \longleftrightarrow \langle \pi(r), car(r), cdr(r) \rangle$$

が言える。 従って,

<u>Prop 4</u> (1) $s = t \iff \pi(s) = \pi(t)$, $\mathrm{car}(s) = \mathrm{car}(t)$, $\mathrm{cdr}(s) = \mathrm{cdr}(t)$

(2) $\forall r \in S_\infty \ \exists!\ \varepsilon \in \mathcal{P}$, $s, t \in S_\infty$ s.t.

$$r = \varepsilon + \mathrm{I}s + \square t$$

(3) $r = \pi(r) + \mathrm{I}\,\mathrm{car}(r) + \square\,\mathrm{cdr}(r)$

(4) $r \in M_\infty$, $s, t \in S_\infty$

$$\Longrightarrow \quad r = \mathrm{cons}(\mathrm{car}(r), \mathrm{cdr}(r))$$
$$s = \mathrm{car}(\mathrm{cons}(s, t))$$
$$t = \mathrm{cdr}(\mathrm{cons}(s, t))$$

(5) $r \in A_\infty$, $s, t \in S_\infty$

$$\Longrightarrow \quad r = \mathrm{snoc}(\mathrm{car}(r), \mathrm{cdr}(r))$$
$$s = \mathrm{car}(\mathrm{snoc}(s, t))$$
$$t = \mathrm{cdr}(\mathrm{snoc}(s, t))$$

各 $n \geq 0$ に対して linear transformation

$$\pi_n : S_\infty \longrightarrow S_\infty$$

を

$$(\pi_n(r), w) = \begin{cases} (r, w) & \text{if } |w| < n \\ 0 & \text{if } |w| \geq n \end{cases} \qquad \left[\text{ここで, } |w| \text{ は word } w \text{ の長さ} \right]$$

と定めれば, π_n は projection になり, 直和分解

$$S_\infty = \mathrm{Im}\,\pi_n \oplus \mathrm{Ker}\,\pi_n$$

が得られる。 $S_n = \mathrm{Im}\,\pi_n$, $M_n = \mathrm{Ker}\,\pi_n$ とおけば, set-theoretic には

$$S_\infty = \sum_{s \in S_n} s + M_n \qquad [\text{直和}]$$

となる。 ここで S_n は有限集合である。 とくに $n = 1$ のときは $\pi_1 = \pi$ となる。 また,

$$S_0 = \{0\} \subsetneqq S_1 = \mathcal{P} \subsetneqq S_2 \subsetneqq \cdots$$

$$M_0 = S_\infty \supsetneqq M_1 = M_\infty \supsetneqq M_2 \supsetneqq \cdots$$

$$S_n = \{ r \in S_\infty \mid |w| \geq n \Rightarrow (r, w) = 0 \}$$
$$M_n = \{ r \in S_\infty \mid |w| < n \Rightarrow (r, w) = 0 \}$$

となることに注意しておく。

$s \in S_\infty$ は $st = ts = 1$ となる t が存在するとき invertible であるといわれる。s が invertible のとき，$st = ts = 1$ となる t は unique に定まる［∵ S_∞ は zero divisor をもたない］ので，$t = s^{-1}$ で表わす。

<u>Th 5</u>　$s \in S_\infty$: invertible $\Leftrightarrow$ $s \in A_\infty$

∵) ($\Rightarrow$)　$st = 1 \Rightarrow \pi(st) = \pi(s)\pi(t) = 1$　［∵ π : ring homomorphism］
$\Rightarrow \pi(s) = \pi(t) = 1$
$\Rightarrow s \in A_\infty$

($\Leftarrow$)　最初に次の Lemma を示す。

<u>Lemma 6</u>　$r \in M_\infty \Rightarrow r^n \in M_n$

∵　$n = 0 \Rightarrow r^0 = 1 \in M_0$

$r^n \in M_n \Rightarrow r^{n+1} \in M_{n+1}$

$|w| < n+1$ とすれば，

$$\begin{aligned}(r^{n+1}, w) &= \textstyle\sum_{uv=w} (r^n, u)(r, v) \\ &= \underbrace{(r^n, w)(r, 1)}_{0\ (\because r \in M_\infty)} + \underbrace{\textstyle\sum_{uv=w,\, u \neq w} (r^n, u)(r, v)}_{0\ (\text{by I.H.})} \\ &= 0\end{aligned}$$

$s = 1 + r$ とおけば，$r \in M_\infty$ となる。$t \in S_\infty$ を次のように定める：

$$(t, w) = (1 + r + \cdots + r^{|w|}, w)$$

このとき，上の Lemma により，$m \geq |w| \Rightarrow$
$(1 + r + \cdots + r^m, w) = (1 + r + \cdots + r^{|w|}, w)$

となる。このとき

$$
\begin{aligned}
&(st, w) \\
&= \textstyle\sum_{uv=w} (s,u)(t,v) \\
&= \textstyle\sum (1+r, u)(1+r+\cdots+r^{|v|}, v) \\
&= \textstyle\sum (1+r, u)(1+r+\cdots+r^{|w|}, v) \\
&= (1+r^{|w|+1}, w) \\
&= (1, w) + (r^{|w|+1}, w) \\
&= (1, w)
\end{aligned}
$$

$\therefore\ st = 1$　同様に $ts = 1$ ■

この証明は代数的であったが，S_∞ に次のような距離を与えることによって解析的な証明も可能になる．

0以外の $r \in S_\infty$ に対して，$r \in M_n - M_{n+1}$ となる n が unique に定まるので，この n を r の order といって，$o(r)$ で表わす。また $o(0) = +\infty$ とおく。このとき，$s, t \in S_\infty$ に対して

$$d(s,t) = 2^{-o(s+t)}$$

と定めれば，(S_∞, d) は metric space になる。S_∞ がこの距離に関して compact になることを示すために，次の lemma を用意する，

<u>Lemma 7</u>　$E \subseteq S_\infty$，$r \in S_n$，$(r+M_n) \cap E$: infinite set
$\Longrightarrow \exists\, s \in S_{n+1}\ [\ \pi_n(s) = r$ かつ $(s+M_{n+1}) \cap E$: infinite set $]$

☺　$I = \{ s \in S_{n+1} \mid \pi_n(s) = r \}$ とおく．このとき

$$r + M_n = \sum_{s \in I} (s + M_{n+1}) \qquad [\text{直和}]$$

を示す。まず，$t \in r + M_n$ とすれば，$t = r + m$，$m \in M_n$ となる．$S_\infty = S_{n+1} \oplus M_{n+1}$ だから $m = s' + m'$，$s' \in S_{n+1}$，$m' \in M_{n+1}$ とかける。$s = r + s'$ とおけば

$$\pi_n(s) = \pi_n(r) + \pi_n(s') = r + \pi_n(m) + \pi_n(m') = r.$$

また，$r \in S_n$，$s' \in S_{n+1}$ だから $s \in S_{n+1}$。また，

$$
\begin{aligned}
r + m &= s + (s + r + m) = s + (r + s' + r + m) = s + (s' + m) \\
&= s + m' \in s + M_{n+1}
\end{aligned}
$$

逆に $s\in I$, $m\in M_{n+1}$ とすれば、

$$s+m = r+(r+s+m)$$

とかけ、$\pi_n(r+s+m) = \pi_n(r)+\pi_n(s)+\pi_n(m) = r+r+0=0$.
即ち、$r+s+m\in M_n$ となり、$s+m\in r+M_n$.

したがって、$(r+M_n)\cap E = \left[\bigcup_{s\in I}(s+M_{n+1})\right]\cap E = \bigcup_{s\in I}\left[(s+M_{n+1})\cap E\right]$
となる。ここで、I は有限集合だから、ある $s\in I$ に対して $(s+M_{n+1})\cap E$
は無限集合になる。この s が求めるものである。 ■

Th 8 (S_∞, d) : compact

∵) $E\subseteq S_\infty$ を無限集合とし、E が集積点をもつことを示す。$r_0=0$ と
おけば、$(r_0+M_0)\cap E$: infinite で $r_0\in S_0$ だから Lemma 7 により、各 n
に対して $r_n\in S_n$, $(r_n+M_n)\cap E$: infinite, $m\le n \Rightarrow r_m=\pi_m(r_n)$ となる r_n を定めることができる。次に $r\in S_\infty$ を

$$(r, w) = (r_{|w|+1}, w)$$

と定める。このとき、任意の n に対して $r+r_n\in M_n$ となる。
∵ $|w|<n \Rightarrow (r,w)=(r_{|w|+1}, w)$. 一方、$n\ge|w|+1$ だから、
$r_{|w|+1}=\pi_{|w|+1}(r_n)$, i.e., $r_n+r_{|w|+1}\in M_{|w|+1}$. したがって $(r_{|w|+1}, w)$
$=(r_n, w)$. ∴ $r+r_n\in M_n$

したがって、すべての n に対して $r+M_n=r_n+M_n$. ∴ $(r+M_n)\cap E$
は infinite set. 即ち、r は E の集積点である。 ■

Cor 9 (S_∞, d) : complete

S_∞ の乗法，加法は d に関して continuous だから、S_∞ は compact
topological ring になる。

§2 S

$S=\{r\in S_\infty \mid \mathrm{supp}\ r : \text{finite set}\}$ と定めれば、S は S_∞ の subring
になる。S はまた、0 を含み cons, snoc に関して閉じた S_∞ の最小の
subset として特徴づけられる。

$$M = M_\omega \cap S, \quad A = A_\omega \cap S$$

とおけば、S_ω におけるのと同様の関係が成り立つ。

Def $\quad X = \langle X ; \times, 0 \rangle$ mogma

$\Longleftrightarrow \quad \times : X \times X \to X, \quad 0 : \{*\} \to X \quad [\, 0(*) = 0 \text{ とかく} \,], \quad 0 \times 0 = 0$

mogma 全体のつくる category を Mog で表わす。ただし、mogma の間の morphism は binary operation $\times$ と nullary operation 0 を保存する mapping として定める。次に category Mog_A を

$$\text{object} : (X, j) \quad X \in Mog, \quad j : A \to X$$

$$\text{morphism} : \quad h \in Mog_A((X,j),(Y,k))$$

$$\Longleftrightarrow \quad h \in Mog(X, Y), \quad k = h \circ j$$

として定める。このとき、S は次のように categorical に特徴づけられる。

<u>Th. 10</u> $\quad i : A \hookrightarrow S$ を inclusion map とすれば、(S, i) は Mog_A の initial object になる。

∵) 任意の $(X, j) \in Mog_A$ に対して、$h : S \to X$ を次のように定める。

$$h(0) = 0$$

$$h(r) = j(r) \qquad \text{if} \quad r \in A$$

$$h(r) = h(car(r)) \times h(cdr(r)) \qquad \text{if} \quad r \in M - \{0\}$$

h が well-defined になることは、$deg : S \to \mathbb{N}$ を次のように定めるとき、$deg(r)$ に関する帰納法で示される。

$$deg(0) = 0$$

$$deg(snoc(s,t)) = 0$$

$$deg(cons(s,t)) = \begin{cases} \max\{deg(s), deg(t)\} + 1 & \text{if } s \neq 0 \text{ or } t \neq 0 \\ 0 & \text{if } s = t = 0 \end{cases}$$

$h \in Mog_A(S, X)$ であること、および $h' \in Mog_A(S, X) \Rightarrow h = h'$

となることは容易に示される。

§3 S^{rat}

Def　S^{rat} は以下をみたす、S_ω の最小の subset。

(1)　$0, 1, \mathrm{I}, \square \in S^{rat}$

(2)　$s, t \in S^{rat} \Rightarrow s+t\ ,\ st \in S^{rat}$

(3)　$s \in S^{rat}\ ,\ \pi(s) = 1 \Rightarrow s^{-1} \in S^{rat}$

あきらかに S^{rat} は S_∞ の subring で $S \subsetneq S^{rat} \subsetneq S_\infty$ となる。以下では S^{rat} が $[\mathrm{I}, \square]$ 上の有限 automaton と密接な関係があることを示す。今後は $\{\mathrm{I}, \square\}$ 上の automaton を単に automaton とよぶことにする。

Def　$X = \langle X\,;\, \delta_X, \varepsilon_X \rangle$ が automaton

$\Longleftrightarrow$　(1)　X : nonempty set　[無限集合でもよい]

　　(2)　$\delta_X : X \times W \to X$　　W の X への作用

　　(3)　$\varepsilon_X : X \to \mathbf{2}$

automaton は、また次の条件をみたす組 $X = \langle X\,;\, car_X, cdr_X, \varepsilon_X \rangle$ と定めても実質的には同じである。

(1)　X : nonempty set

(2)　$car_X\ ,\ cdr_X : X \to X$

(3)　$\varepsilon_X : X \to \mathbf{2}$

automaton $X = \langle X\,;\, \delta_X, \varepsilon_X \rangle$ に対して

$$L_X : X \to S_\infty$$

を　$(L(x), w) = \varepsilon_X(\delta_X(x, w))$　と定める。S_∞ と $\mathcal{P}(W)$ を同一視すれば、$L_X(x)$ は x が受理する language とみなすことができる。

$\langle S_\infty\,;\, \delta, \pi \rangle$ は自然に automaton になるが、これは以下の著しい性質を持つ。まず、automaton 全体のつくる category Aut を次のように定める。

$h \in \mathrm{Aut}(X, Y)$

$\Longleftrightarrow$ $h : X \to Y$ は次の diagram を可換にする。

$$\begin{array}{ccc} X \times W & \xrightarrow{h \times 1} & Y \times W \\ \delta_X \downarrow & & \downarrow \delta_Y \\ X & \xrightarrow[h]{} & Y \end{array} \quad , \qquad \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{h} & Y \\ & \varepsilon_X \searrow \quad \swarrow \varepsilon_Y & \\ & 2 & \end{array}$$

<u>Prop 11</u> $L_X : X \to S_\infty \in \mathrm{Aut}(X, S_\infty)$

$\because)$ $(\delta(L(x), w), u) = (L(x), wu) = \varepsilon(\delta(x, wu))$,

$(L(\delta(x, w)), u) = \varepsilon(\delta(\delta(x, w), u)) = \varepsilon(\delta(x, wu))$.

$\pi(L(x)) = (L(x), 1) = \varepsilon(\delta(x, 1)) = \varepsilon(x)$. ■

<u>Prop 12</u> $L_{S_\infty} : S_\infty \to S_\infty$ は identity morphism

$\because)$ $(L(r), w) = \pi(\delta(r, w)) = (\delta(r, w), 1) = (r, w1) = (r, w)$

$\therefore$ $L(r) = r$. ■

<u>Prop 13</u> $h \in \mathrm{Aut}(X, Y) \Rightarrow$

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{h} & Y \\ & L_X \searrow \quad \swarrow L_Y & \\ & S_\infty & \end{array}$$

$\because)$ $(L_Y(h(x)), w) = \varepsilon_Y(\delta_Y(h(x), w)) = \varepsilon_Y(h(\delta_X(x, w))) = \varepsilon_X(\delta_X(x, w))$
$= (L_X(x), w)$ ■

<u>Th. 14</u> S_∞ は Aut の terminal object

$\because)$ X を任意の automaton とする。Prop 11 により $L_X \in \mathrm{Aut}(X, S_\infty)$ である。また $h \in \mathrm{Aut}(X, S_\infty)$ とすれば、Prop 13 で $Y = S_\infty$ とおき、Prop 12 を用いれば $h = L_X$ となる。したがって S_∞ は Aut の terminal object になる。■

以下では S^{rat} の categorical な特徴づけを考察する。

$M(n, S_\infty)$ を $n \times n$ S_∞ 行列のつくる行列環とし、$M(n, \mathbb{Z})$ も同様に定める。このとき;

$$\begin{array}{cccc} \Pi_n : & M(n, S_\infty) & \longrightarrow & M(n, \mathbb{Z}) \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & R = (r_{ij}) & \longmapsto & \Pi_n(R) = (\pi(r_{ij})) \end{array}$$

は ring homomorphism になる。したがって、$G_n = \Pi_n^{-1}(I_n)$, I_n: 単位行列 とすれば G_n は行列の積に関して monoid になる。しかも、

<u>Th. 15</u>　G_n は行列の積に関して群をなす。

∵) $1 \leqq i \leqq n$, $r \in A_\infty$ に対して

$$Q_n(i;r) = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & r & \\ & & & & 1 \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array} \in G_n \quad ,$$

$1 \leqq i, j \leqq n$, $i \neq j$, $r \in M_\infty$ に対して

$$R_n(i,j;r) = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & r \\ & & & 1 \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{cccc} & & & \uparrow \\ & & & j \end{array} & \end{array} \in G_n$$

とおく。$Q_n(i;r)^{-1} = Q_n(i;r^{-1})$, $R_n(i,j;r)^{-1} = R_n(i,j;r)$ である。$\{Q_n(i;r), R_n(i,j;r)\}$ が G_n の中で生成する群を H_n で表わす。群 H_n は自然に G_n に左右から作用する。したがって G_n 上の同値関係 $\sim_n$ を

$$R \sim_n S \iff \exists U, V \in H_n \quad S = URV$$

で定めることができる。以下では $H_n = G_n$ を n に関する帰納法で示すが、そのためには、$R \sim_n I_n$ (for all $R \in G_n$) を示せば十分である。

$n = 1$:　$R = (r) \in G_1 \Rightarrow r \in A_\infty \Rightarrow Q_1(1, r^{-1})$ を左からかければ
$R \sim_1 I_1$

$n > 1$:　$R = (r_{ij}) \in G_n \Rightarrow r_{11} \in A_\infty$ だから $Q_n(1, r_{11}^{-1})$ を左からかけて

$$R \sim_n \begin{pmatrix} 1 & {}^t\mathbf{b} \\ \mathbf{0} & R' \end{pmatrix} \underset{[R_n\text{を左から}]}{\sim_n} \begin{pmatrix} 1 & {}^t\mathbf{b} \\ \mathbf{0} & R'' \end{pmatrix} \underset{[R_n\text{を右から}]}{\sim_n} \begin{pmatrix} 1 & {}^t\mathbf{0} \\ \mathbf{0} & R''' \end{pmatrix}$$

即ち,

$$\exists U_1, V_1 \in H_n : \quad U_1 R V_1 = \begin{pmatrix} 1 & {}^t\mathbf{0} \\ \mathbf{0} & R''' \end{pmatrix}$$

$R''' \in G_{n-1}$ だから, I.H. により

$$\exists U_2, V_2 \in H_{n-1} : \quad U_2 R''' V_2 = I_{n-1}$$

したがって, $\begin{pmatrix} 1 & {}^t\mathbf{0} \\ \mathbf{0} & U_2 \end{pmatrix} U_1 R V_1 \begin{pmatrix} 1 & {}^t\mathbf{0} \\ \mathbf{0} & V_2 \end{pmatrix} = I_n$ となるが,
$\begin{pmatrix} 1 & {}^t\mathbf{0} \\ \mathbf{0} & U_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & {}^t\mathbf{0} \\ \mathbf{0} & V_2 \end{pmatrix} \in H_n$ だから, $R \sim_n I_n$ がいえた。 ■

Remark.　$URV = I_n \Rightarrow VUR = I_n$ だから, 「左基本変形」だけで $R \in G_n$ は単位行列に変形できる。 Th. 15 はまた, 各 S^{nat} 上の行列環についても成立する。

次に有限 automaton の特性方程式について考える。 $\mathbf{X} = \langle X ; car_X, cdr_X, \varepsilon_X \rangle$ を有限 automaton とする。即ち $|X| = n$, $X = \{x_1, \cdots, x_n\}$ とする。 $I = \{1, 2, \cdots, n\}$ とし, $car_I, cdr_I : I \to I$ を

$$car_I(i) = j \iff car_X(x_i) = x_j$$
$$cdr_I(i) = j \iff cdr_X(x_i) = x_j$$

によって定める。また, 各 $x_i \in X$ に対して形式的文字 X_i を対応させる。このとき, 線型方程式系

$$X_i = \mathrm{I}\, X_{car(i)} + \mathrm{D}\, X_{cdr(i)} + \varepsilon(x_i) \qquad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

$$r_{ij} = \delta(i, j) + \mathrm{I}\,\delta(car(i), j) + \mathrm{D}\,\delta(cdr(i), j) \qquad \boxed{R\mathbf{X} = \boldsymbol{\varepsilon}}$$

を automaton X の特性方程式という。この線型方程式系の係数行列 $R = (r_{ij})$ は G_n の元なので, Th. 15 により [$r_{ij} \in S^{rat}$ にも注意して]

「automaton X の特性方程式は S_∞ で unique な解を持ち, しかもその解は S^{rat} に入る。」

ことがわかる。

<u>Th. 16</u> $L(x_i) = \mathrm{I}\,L(x_{car(i)}) + \mathrm{O}\,L(x_{cdr(i)}) + \varepsilon(x_i) \quad (i=1,2,\cdots,n)$

∵) $L : X \to S_\infty \in \mathrm{Aut}(X, S_\infty)$ だから

$$
\begin{aligned}
car(L(x_i)) &= L(car_X(x_i)) = L(x_{car(i)})\\
cdr(L(x_i)) &= L(cdr_X(x_i)) = L(x_{cdr(i)})\\
\pi(L(x_i)) &= \varepsilon(x_i)
\end{aligned}
$$

である。したがって

(1) $\pi(\text{右辺}) = \pi(\mathrm{I}\,L(x_{car(i)})) + \pi(\mathrm{O}\,L(x_{cdr(i)})) + \pi(\varepsilon(x_i))$
$\quad = \varepsilon(x_i) = \pi(\text{左辺})$

(2) $car(\text{右辺}) = car(\mathrm{I}\,L(x_{car(i)})) + car(\mathrm{O}\,L(x_{cdr(i)})) + car(\varepsilon(x_i))$
$\quad = L(x_{car(i)}) = car(\text{左辺})$

(3) (2) と同様に, $cdr(\text{右辺}) = cdr(\text{左辺})$

Prop 4 (1) により (左辺) = (右辺) となる ■

<u>Cor. 17</u> X : finite automaton $\Rightarrow$ $\mathrm{Im}\,L_X \subseteq S^{rat}$

∵) Th. 16 により $\{L(x_i) \mid i=1,\cdots,n\}$ は X の特性方程式の解になる。■

次に, Cor. 17 の逆問題を考える。即ち, $r \in S^{rat}$ を与えたとき, $r \in \mathrm{Im}\,L_X$ となる有限 automaton X が存在するかどうかを考える。

最初に, X を有限集合とすると $\wp(X)$ [X の巾集合] は, 対称差 (+ で表す)

$$U + V = (U - V) \cup (V - U)$$

に関して，$\mathbb{F}$上の線型空間になることに注意しておく。また $x \in X$ と singleton set $\{x\}$ の同一視によって，X は $\mathcal{P}(X)$ の basis になる。

X：有限 automaton，$x \in X$，$r = L_X(x)$ となるとき

$$X \ni x \models r$$

とかき，$x \in X$ は r を realize すると言う。また，このとき r は realizable であるという。Cor. 17 により $r \in S^{rat}$ である。

<u>Th. 18</u> $r \in S^{rat} \Rightarrow r$: realizable

∵) (1) $\{0, 1, \mathbb{I}, \Omega\} \subseteq S_\omega$ は car, cdr に関して閉じているので，自然に有限 automaton を定め，各 state は自分自身を realize する。

(2) 有限 automaton X, Y に対して automaton Z を次のように定める。

$$Z = X \times Y = \{x \times y \mid x \in X, y \in Y\}$$
$$\delta_Z(x \times y, w) = \delta_X(x, w) \times \delta_Y(y, w)$$
$$\varepsilon_Z(x \times y) = \varepsilon_X(x) + \varepsilon_Y(y)$$

このとき，任意の $x \times y \in X \times Y$ に対して

$$\begin{aligned}(L(x \times y), w) &= \varepsilon(\delta(x \times y, w)) = \varepsilon(\delta(x, w) \times \delta(y, w)) \\ &= \varepsilon(\delta(x, w)) + \varepsilon(\delta(y, w)) = (L(x), w) + (L(y), w) \\ &= (L(x) + L(y), w)\end{aligned}$$

i.e., $L(x \times y) = L(x) + L(y)$ となる。したがって，

$$X \ni x \models s,\ Y \ni y \models t \Rightarrow Z \ni x \times y \models s + t$$

となる。

(3) automaton X，(および $y \in Y$) Y に対して automaton Z を次のように定める。

$$Z = \wp(Y)\times X \ni z = (y_{i_1}+\cdots+y_{i_k})\times x$$
$$\mathrm{car}(z) = (\mathrm{car}(y_{i_1})+\cdots+\mathrm{car}(y_{i_k}) + \varepsilon(x)\,\mathrm{car}(y))\times \mathrm{car}(x)$$
$$\mathrm{cdr}(z) = (\mathrm{cdr}(y_{i_1})+\cdots+\mathrm{cdr}(y_{i_k}) + \varepsilon(x)\,\mathrm{cdr}(y))\times \mathrm{cdr}(x)$$
$$\varepsilon(z) = \varepsilon(y_{i_1})+\cdots+\varepsilon(y_{i_k}) + \varepsilon(x)\,\varepsilon(y)$$

Zの特性方程式は

$$X_z = I\,X_{\mathrm{car}(z)} + \square\,X_{\mathrm{cdr}(z)} + \varepsilon(z) \qquad (z\in Z)$$

となる。ここで、

$$L'(z) = L(y_{i_1})+\cdots+L(y_{i_k}) + L(x)L(y) \qquad (z\in Z)$$

が、Zの特性方程式の解になることを示す。i.e.,

$$L'(z) = I\,L'(\mathrm{car}(z)) + \square\,L'(\mathrm{cdr}(z)) + \varepsilon(z) \qquad (z\in Z)$$

を示す。この式の(左辺)と(右辺)が等しくなることをいえばよい。

(i) $\pi(\text{左辺}) = \pi(L(y_{i_1}))+\cdots+\pi(L(y_{i_k})) + \pi(L(x))\,\pi(L(y))$
$= \varepsilon(y_{i_1})+\cdots+\varepsilon(y_{i_k}) + \varepsilon(x)\,\varepsilon(y)$
$= \varepsilon(z) = \pi(\text{右辺})$

(ii) $\mathrm{car}(\text{左辺}) = \mathrm{car}(L(y_{i_1}))+\cdots+\mathrm{car}(L(y_{i_k})) + \mathrm{car}(L(x)L(y))$
$= L(\mathrm{car}(y_{i_1}))+\cdots+L(\mathrm{car}(y_{i_k})) + \mathrm{car}(L(x))L(y) + \pi(L(x))\,\mathrm{car}(L(y))$
$= L(\mathrm{car}(y_{i_1}))+\cdots+L(\mathrm{car}(y_{i_k})) + \varepsilon(x)\,L(\mathrm{car}(y)) + L(\mathrm{car}(x))\,L(y)$
$= L'(\mathrm{car}(z)) = \mathrm{car}(\text{右辺})$

(iii) (ii)と同様に、$\mathrm{cdr}(\text{左辺}) = \mathrm{cdr}(\text{右辺})$

$L'(z)$ がZの特性方程式の解であることがわかった。したがって、

$$L_Z(z) = L(y_{i_1})+\cdots+L(y_{i_k}) + L(x)L(y)$$

となる。今、$X\ni x\models s$, $Y\ni y\models t$ とすれば $L_Z(\emptyset\times \overset{x}{\cancel{y}}) = L(x)L(y)$
$= st$, i.e., $Z \ni \emptyset\times \underset{x}{\cancel{y}} \models st$.

(4) $X \ni x \models r$, $\pi(r) = 0$ とする。 $r^* = (1+r)^{-1}$ とおけば、
$1 = (1+r)r^* = r^* + rr^*$ だから、 $r^* = 1 + rr^*$ となる。したがって、
$car(r^*) = car(rr^*) = \pi(r)\,car(r^*) + car(r)\,r^* = car(r)\,r^*$. 同様に、
$cdr(r^*) = cdr(r)\,r^*$ となる。 automaton Z を次のように定める。

$$Z = \wp(X) \ni z = x_{i_1} + \cdots + x_{i_k}$$
$$car(z) = car(x_{i_1}) + \cdots + car(x_{i_k}) + \varepsilon(z)\,car(x)$$
$$cdr(z) = cdr(x_{i_1}) + \cdots + cdr(x_{i_k}) + \varepsilon(z)\,cdr(x)$$
$$\varepsilon(z) = \varepsilon(x_{i_1}) + \cdots + \varepsilon(x_{i_k})$$

このとき、

$$\tilde{L}(z) = (L(x_{i_1}) + \cdots + L(x_{i_k}))\,r^* \qquad (z \in Z)$$

が Z の特性方程式の解になることを示す。 i.e.,

$$\tilde{L}(z) = I\tilde{L}(car(z)) + 0\tilde{L}(cdr(z)) + \varepsilon(z) \qquad (z \in Z)$$

を示す。

(i) $\pi(\text{左辺}) = (\pi(L(x_{i_1})) + \cdots + \pi(L(x_{i_k}))\,\pi(r^*)$
$= \varepsilon(x_{i_1}) + \cdots + \varepsilon(i_k)$
$= \varepsilon(z) = \pi(\text{右辺})$

(ii) $car(\text{左辺}) = [car(L(x_{i_1})) + \cdots + car(L(x_{i_k}))]\,r^* + \pi(L(x_{i_1}) + \cdots + L(x_{i_k}))\,car(r^*)$
$= [L(car(x_{i_1})) + \cdots + L(car(x_{i_k}))]\,r^* + \varepsilon(z)\,car(r)\,r^*$
$= [L(car(x_{i_1})) + \cdots + L(car(x_{i_k})) + \varepsilon(z)\,L(car(x))]\,r^*$
$= \tilde{L}(car(z)) = car(\text{右辺})$

(iii) (ii) と同様に、 $cdr(\text{左辺}) = cdr(\text{右辺})$ となる。

したがって、 $Z \ni x \models L(x)\,r^* = rr^*$ となる。 $r^* = 1 + rr^*$ だから
$r^* = (1+r)^{-1}$ は realizable. ∎

この定理から、直ちに、 S^{rat} が自然に automaton になることが示される。

car(st) = car(s) t + r(s) car(t)

inductive にも証明可能?

Cor. 19 $r \in S^{rat} \Rightarrow car(r), cdr(r) \in S^{rat}$

∵) Th. 18 により, $X \ni x \vdash r$ となる, X, x がとれる。また, Cor. 17 により, $L_X : X \longrightarrow S^{rat}$ となる。したがって, $car(r) = car(L(x)) = L(car(x)) \in S^{rat}$. 同様に $cdr(r) \in S^{rat}$ ∎

S^{rat} は car, cdr に関して閉じているので, 自然に automaton になる。この automaton は有限 automaton ではないが, 以下に定義を与える局所有限 automaton になる。

Def $X = \langle X; \delta, \varepsilon \rangle$ が局所有限 automaton
$\Leftrightarrow$ 任意の $x \in X$ に対して $\{y \mid \exists w \in W \; y = \delta(x, w)\}$ は有限集合。

局所有限 automaton 全体のつくる Aut の full subcategory を Aut' で表わす。このとき, S^{rat} は次の定理により特徴づけられる。

Th. 20 S^{rat} は Aut' の terminal object

∵) 最初に S^{rat} が局所有限であることを示す。$r \in S^{rat}$ とすれば, Th. 18 により $X \ni x \vdash r$ となる finite automaton X と $x \in X$ がとれる。このとき, $\mathrm{Im}\, L_X$ は有限集合で, car, cdr に関して閉じている。したがって, $\{y \mid \exists w \in W \; y = \delta(x, w)\}$ $[\subseteq \mathrm{Im}\, L_X]$ は有限集合になる。i.e., S^{rat} は局所有限。

次に, X を任意の局所有限 automaton とし, $L_X : X \to S_\infty$ を考える。任意の $x \in X$ に対して $\langle x \rangle = \{y \mid \exists w \in W \; y = \delta(x, w)\}$ は有限集合で, しかも自然に automaton になる。このとき

$$L_X(x) = L_{\langle x \rangle}(x) \in S^{rat}$$

だから, $L_X : X \longrightarrow S^{rat}$ とみなせる。あとは Th. 14 と同様 ∎

Example 最後に Th. 18 の証明を用いて, $(1 + \square)^{-1}$ を accept する有限 automaton を構成してみる。$X = \{0, 1, \square\}$ は car, cdr に関して閉じているので, 次のような automaton を作る。

x	car(x)	cdr(x)	$\varepsilon(x)$	$L(x)$
0	0	0	0	0
1	0	0	1	1
$\square$	0	1	0	$\square$

これ, Th 18.(4) の方法で, $Z = \mathcal{P}(X)$ に automaton の構造が入る。

z	car(z)	cdr(z)	$\varepsilon(z)$	$L(z)$
ϕ	ϕ	ϕ	0	0
$\{0\}$	$\{0\}$	$\{0\}$	0	0
$\{1\}$	$\{0\}$	$\{0,1\}$	1	$\square^*$
$\{\square\}$	$\{0\}$	$\{1\}$	0	$\square\square^*$
$\{0,1\}$	ϕ	$\{1\}$	1	$\square^*$
$\{0,\square\}$	ϕ	$\{0,1\}$	0	$\square\square^*$
$\{1,\square\}$	ϕ	$\{0\}$	1	1
$\{0,1,\square\}$	$\{0\}$	ϕ	1	1

$L_Z : Z \to S^{rat}$ が引き起こす同値関係によって, Z を簡約化すれば次の automaton $\mathcal{U}$ がえられる。 ただし $[z]$ は $z \in Z$ の属する同値類.

u	car(u)	cdr(u)	$\varepsilon(u)$	$L(u)$
$u_1 = [\{1\}]$	u_2	u_1	1	$\square^*$
$u_2 = [\Phi]$	u_2	u_2	0	0
$u_3 = [\{\square\}]$	u_2	u_1	0	$\square\square^*$
$u_4 = [\{1,\square\}]$	u_2	u_2	1	1

したがって $\mathcal{U}$ の特性方程式は次のようになる。

$$
\begin{cases}
X_1 = \mathrm{I}\, X_2 + \square\, X_1 + 1 \\
X_2 = \mathrm{I}\, X_2 + \square\, X_2 \\
X_3 = \mathrm{I}\, X_2 + \square\, X_1 \\
X_4 = \mathrm{I}\, X_2 + \square\, X_2 + 1
\end{cases}
$$

$X_i = L(u_i)$ が解になるはずであるが, これを確かめてみる。 まず, $(1 + \mathrm{I} + \square) X_2 = 0 \Rightarrow X_2 = (1 + \mathrm{I} + \square)^{-1} 0 = 0$ となる。 したがって, $(1 + \square) X_1 = 1 \Rightarrow X_1 = (1+\square)^{-1} = \square^*$ となる。 $\therefore X_3 = \square\square^*$, $X_4 = 1$.

ところで，X_1 は方程式

$$X_1 = 1 + \square X_1$$

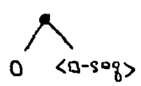
をみたすが，$X_1 = \langle \square\text{-seq} \rangle$ とおけば，BNF equation

$$\langle \square\text{-seq}\rangle ::= 1 \mid \square \langle \square\text{-seq}\rangle$$

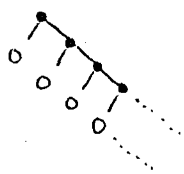
がえられる。[1 = W の単位元 = empty word に注意] このとき，上でみたように，regular language

$$\langle\square\text{-seq}\rangle = \square^* = \{1, \square, \square^2, \square^3, \cdots\}$$

が定まる。この方程式は tree の形でかけば

$\langle\square\text{-seq}\rangle =$ 

となり，その解は

$\langle\square\text{-seq}\rangle =$ 

であらわされる。

[参考文献]

1] Sato, M. : Theory of Symbolic Expressions, Technical Report TR 80-16, Dept. of Info. Sci., Univ. of Tokyo

2] Hagiya, M. : Hyperlisp 2.1 Manual, internal memo, Univ. of Tokyo

3] はぎやまさみ：よい子の Hyperlisp, internal memo, Univ. of Tokyo