

「計算と論理」 Software Foundations その7

五十嵐 淳

`cal23@fos.kuis.kyoto-u.ac.jp`

<http://www.fos.kuis.kyoto-u.ac.jp/~igarashi/class/cal/>

December 19, 2023

IndProp.v

- 帰納的に定義される命題
- 証明オブジェクトを証明で使う
 - ▶ 導出についての inversion
 - ▶ 導出についての帰納法
- (帰納的に定義される) 関係
- ケーススタディ: 正則表現
- ケーススタディ: reflection の改良

命題を返す関数による偶数性の定義 (1)

```
Coq < Definition Even' (n:nat) : Prop :=  
    even n = true.
```

Even' is defined

```
Coq < Check Even'.
```

Even'

: nat -> Prop

```
Theorem two_is_even : Even' 2.
```

```
Proof.
```

```
  unfold Even'.  reflexivity.
```

```
Qed.
```

命題を返す関数による偶数性の定義 (2)

```
Coq < Definition Even (n:nat) : Prop :=  
    exists k, n = double k.
```

Even is defined

```
Theorem two_is_even : Even 2.
```

```
Proof.
```

```
  unfold Even. exists 1. reflexivity.
```

```
Qed.
```

これらの方法では命題として使える**基本的な語彙** (原子命題) は増えていない。

偶数の集合の帰納的定義

偶数の集合 EV は、以下のふたつの条件を満たす最小の(自然数の部分)集合である。

- 0 は EV の元である
- n が EV の元ならば s ($s \ n$) は EV の元である
- 「ふたつの条件」だけを満たす¹集合はいくらでもある
 - ▶ 例えば 1 以外の自然数の集合
- 最小性で「ゴミ」を取り除く

帰納的定義 = 規則について閉じている + 最小性

¹「規則について閉じている」ともいう

述語「偶数性」の帰納的定義

集合を述語と思うと「述語の帰納的定義」になる

自然数 n が偶数である ($ev\ n$ と書く) とは, 以下の規則から帰納的に定義される.

- $ev\ 0$ である
- 任意の自然数 n について, $ev\ n$ ならば $ev\ (S\ (S\ n))$ である

自然演繹流で書けば

新しい原子命題 $\text{ev } n$:

$$\frac{\Gamma \vdash n : \text{nat}}{\Gamma \vdash \text{ev } n : \text{Prop}} \quad (\text{Ev-P})$$

- 導入規則:

$$\frac{}{\Gamma \vdash \text{ev } 0} \quad (\text{Ev-I1})$$

$$\frac{\Gamma \vdash \text{ev } n}{\Gamma \vdash \text{ev } (\text{S } (\text{S } n))} \quad (\text{Ev-I2})$$

Coq での帰納的述語の定義

```
Inductive ev : nat -> Prop :=  
  | ev_0 : ev 0  
  | ev_SS (n:nat) (H : ev n) : ev (S (S n)).
```

- 新しい(自然数を引数とする)命題 ev の定義
 - ▶ $nat \rightarrow Prop \dots$ 自然数に関する述語
- コンストラクタ \doteq 導入規則の名前
 - ▶ あたかも公理のように使える
- コンストラクタの型情報 \doteq 規則の内容
 - ▶ $n:nat \dots$ 規則のパラメータ
 - ▶ $H:ev\ n \dots$ 規則の前提

今までの Inductive 定義との違い

```
Inductive ev : nat -> Prop :=  
  | ev_0 : ev 0  
  | ev_SS (n:nat) (H : ev n) : ev (S (S n)).
```

- 自然数についての述語 (nat から Prop への関数) の帰納的定義
- パラメータに名前がついておらず，定義される述語は色々な引数に適用されている (ev n, ev 0 など)
 - ▶ list も Type から Type への関数だったが，常に list X の形で使われていた

間違った定義の仕方

```
Coq < Inductive wrong_ev (n : nat) : Prop :=  
  | wrong_ev_0 : wrong_ev 0  
  | wrong_ev_SS (n : nat) (H : wrong_ev n) : wrong_ev (S n)
```

Toplevel input, characters 0-127:

```
> Inductive wrong_ev (n : nat) : Prop :=  
> | wrong_ev_0 : wrong_ev 0  
> | wrong_ev_SS (n : nat) (H : wrong_ev n) : wrong_ev (S n)
```

Error: In environment

wrong_ev : nat -> Prop

n : nat

Unable to unify "wrong_ev 0" with "wrong_ev n".

例: 「4は偶数である」

```
Coq < Check ev_0.
```

```
ev_0
```

```
: ev 0
```

```
Coq < Check (ev_SS 0).
```

```
ev_SS 0
```

```
: ev 0 -> ev 2
```

```
Coq < Check (ev_SS 0 ev_0).
```

```
ev_SS 0 ev_0
```

```
: ev 2
```

```
Coq < Check (ev_SS 2 (ev_SS 0 ev_0)).
```

```
ev_SS 2 (ev_SS 0 ev_0)
```

```
: ev 4
```

例: 「4は偶数である」

```
Theorem four_is_even : ev 4.
```

```
Proof.
```

```
  apply ev_SS.  apply ev_SS.  apply ev_0.
```

```
  (* Or: apply (ev_SS 2 (ev_SS 0 ev_0)). *)
```

```
Qed.
```

その他の例 (1): コラッツ予想

以下の関数 f について、任意の整数に f を繰り返し適用するといつか 1 を返す (?)

```
Fixpoint div2 (n : nat) :=  
  match n with  
    0 => 0  
  | 1 => 0  
  | S (S n) => S (div2 n)  
end.
```

```
Definition f (n : nat) :=  
  if even n then div2 n else (3 * n) + 1.
```

何ステップで1に到達するか計算する関数

```
Fixpoint reaches_1_in (n : nat) :=  
  if n =? 1 then 0  
  else 1 + reaches_1_in (f n).
```

…は、任意の n について停止することが Coq にはわからない (五十嵐にもわかりません) ので、定義できない!

(帰納的) 述語「fを繰り返すと1に到達する」は定義できる

```
Inductive reaches_1 : nat -> Prop :=  
  | term_done : reaches_1 1  
  | term_more (n : nat) (H : reaches_1 (f n)) :
```

```
Conjecture collatz : forall n, reaches_1 n.
```

“If you succeed in proving this conjecture, you’ve got a bright future as a number theorist. But don’t spend too long on it—it’s been open since 1937!”

他の例

(なんか結構難しいのが最初に出てきますね…)

- 2項関係の推移的閉包
 - ▶ R の推移的閉包 $\text{clos_trans } R$
- (3要素) リストの置換 (permutation)
 - ▶ リスト l_1 は l_2 の置換である


```

Inductive clos_trans {X: Type} (R: X->X->Prop)
    : X->X->Prop :=
| t_step (x y : X) (H : R x y) :
    clos_trans R x y
| t_trans (x y z : X)
    (H1 : clos_trans R x y)
    (H2 : clos_trans R y z) :
    clos_trans R x z.

```

```

Inductive Perm3 X : Type
  : list X -> list X -> Prop :=
| perm3_swap12 (a b c : X) :
  Perm3 [a;b;c] [b;a;c]
| perm3_swap23 (a b c : X) :
  Perm3 [a;b;c] [a;c;b]
| perm3_trans (l1 l2 l3 : list X)
  (H1 : Perm3 l1 l2) (H2: Perm3 l2 l3)
  : Perm3 l1 l3.

```

IndProp.v

- 帰納的に定義される命題
- 証明オブジェクトを証明で使う
 - ▶ 導出についての inversion
 - ▶ 導出についての帰納法
- (帰納的に定義される) 関係
- ケーススタディ: 正則表現
- ケーススタディ: reflection の改良

偶数性の導出と証明オブジェクトの同型性

$ev\ n$ が導出 (証明) できる \iff

- 導出の最後の規則は EV-I1 で $n = 0$, もしくは
- 導出の最後の規則は EV-I2 で, ある n' について $n = S(S(n'))$ かつ, $ev\ n'$ である.

つまり

$E : ev\ n$ である \iff

- $E = ev_0$ かつ $n = 0$, もしくは
- ある n' と E' について $E = ev_SS\ n'\ E'$ かつ $n = S(S(n'))$ かつ, $E' : ev\ n'$ である.

導出についての場合分け (1)

Theorem `ev_inversion` :

```
forall (n : nat), ev n ->  
  (n = 0) \/ (exists m, n = S (S m) /\ ev m).
```

Proof.

```
intros n Hev. destruct Hev as [ | m Hm].  
- left. reflexivity.  
- right. exists m. split.  
  + reflexivity. + apply Hm.
```

Qed.

導出された結論 `ev n` から、それを導いた前提に遡る、この種の定理を「逆転 (inversion) の定理」とも呼ぶ

destruct の働き

n (Hev の型の引数) を

- 0 の場合

- ▶ ev_0 の型の引数として出てくる

- $S(S(...))$ の場合

- ▶ ev_{SS} の型の引数として出てくる

に場合わけ, つまり

- n に 0 を代入したような状況

- n に $S(S(m))$ を代入した状況 (m は intro パターンに現れる変数名)

を生成

逆転の定理の応用

```
Theorem evSS_ev : forall n,  
  ev (S (S n)) -> ev n.
```

Proof.

```
intros n H. apply ev_inversion in H.  
destruct H as [H0|H1].  
- discriminate H0.  
- destruct H1 as [n' [Hnm Hev]].  
  injection Hnm as Heq.  
  rewrite Heq. apply Hev.
```

タクティック inversion

逆転の定理とそれにまつわる定型的な処理 (場合分け, 矛盾した場合の除去, 等式の整理) をしてくれる

```
Theorem evSS_ev' : forall n,  
  ev (S (S n)) -> ev n.
```

Proof.

```
  intros n E.
```

```
  inversion E as [| n' E'].
```

```
  (* We are in the [E = ev_SS n' E'] case! *)
```

```
  apply E'.
```

Qed.

任意の自然数 n について $ev (S(S n))$ ならば $ev n$

(証明) $ev (S(S n))$ の導出について場合分け

- ev_0 の場合: ありえない.
- ev_SS の場合: 導出の前提は $ev n$ のはずなので題意が示せる.

(証明終)

inversion による矛盾の自動除去

Theorem one_not_even : \sim ev 1.

Proof.

```
intros H. apply ev_inversion in H.  
destruct H as [ | [m [Hm _]]].  
- discriminate H.  
- discriminate Hm.
```

Qed.

Theorem one_not_even' : \sim ev 1.

Proof.

```
intros H. inversion H. Qed. (* Wow!! *)
```

等式に対する inversion

injection, discriminate を自動でやってくれる

```
Theorem inversion_ex1 : forall (n m o : nat),  
  [n; m] = [o; o] -> [n] = [m].
```

Proof.

```
  intros n m o H. inversion H. reflexivity.
```

Qed.

```
Theorem inversion_ex2 : forall (n : nat),  
  S n = 0 -> 2 + 2 = 5.
```

Proof.

```
  intros n contra. inversion contra.
```

Qed.

導出に対する inversion

文脈で $H : I$ (I は帰納的に定義された命題) とする時,
inversion H は:

- コンストラクタ (導出規則) 毎に場合わけ
 - ▶ ev_0 , ev_SS の場合
- 各場合での前提条件
 - ▶ を文脈に追加するか
 - ★ ev_SS の場合の前提 $ev\ n$ が追加
 - ▶ 前提が矛盾している場合は場合そのものの除去
 - ★ ev_0 の場合 ($S\ (S\ n) = 0$ はありえない)

を一気に行う

IndProp.v

- 帰納的に定義される命題
- 証明オブジェクトを証明で使う
 - ▶ 導出についての inversion
 - ▶ 導出についての帰納法
- (帰納的に定義される) 関係
- ケーススタディ: 正則表現
- ケーススタディ: reflection の改良

異なる偶数性の定義の同値性

```
Lemma ev_even_firsttry : forall n,  
  ev n -> Even n.
```

Proof.

```
  unfold Even.
```

```
  intros n E. inversion E as [EQ' | n' E' EQ'] .
```

```
  - (* E = ev_0 *) exists 0. reflexivity.
```

```
  - (* E = ev_SS n' E' *) simpl.
```

```
(* n' : nat
```

```
   E' : ev n'
```

```
=====
```

```
exists k : nat, S (S n') = double k *)
```

- この時点ですまってしまうが、`ev n'` に注目!

もし、 $ev\ n'$ から $\exists k, n' = double\ k$ が証明できたとしたら、うまくいく:

```
assert (H : (exists k', n' = double k') ->
           (exists k, S (S n') = double k)).
{ intros [k' Hk']. rewrite Hk'.
  exists (S k'). reflexivity. }
apply H.
(* reduce the original goal to the new one *)
```

- この状況，どこかで見たような…？

偶数に関する帰納法

$P(n)$ を自然数 n の性質について述べた命題とする

偶数に関する帰納法の原理

「任意の偶数 n について $P(n)$ 」は以下と同値

- $P(0)$ かつ
- 任意の偶数 n' について $P(n')$ ならば $P(S(S n'))$
- ふたつの場合分けは偶数性の定義に由来

自然演繹風に書くと

ev の除去規則:

$$\frac{\Gamma \vdash ev\ m \quad \Gamma \vdash P[O]}{\Gamma, n : nat, H : evn, IH : P[n] \vdash P[S(Sn)]} \quad \Gamma \vdash P[m]$$

(EV-E)

帰納法を使う

```
Lemma ev_even : forall n,  
  ev n -> Even n.
```

Proof.

```
  unfold Even.
```

```
  intros n E.
```

```
  induction E as [|n' E' IH].
```

```
  - (* E = ev_0 *) exists 0. reflexivity.
```

```
  - (* E = ev_SS n' E' *)
```

```
      with IH : exists k', n' = double k' *
```

```
      destruct IH as [k' Hk'].
```

```
      rewrite Hk'. exists (S k'). reflexivity.
```

Qed.

induction E って?

- $E : ev\ n$ ということは,
 - ▶ $E = ev_0$ かつ $n = 0$
 - ▶ $E = ev_SS\ n'\ E'$ かつ $n = S(Sn')$ かつ $E' : ev\ n'$ (つまり n' も偶数)

のいずれか。

- E は (枝分かれしない導出木で) ある種のリスト構造をしている!

⇒ induction E はリストに関する帰納法のようなもの!

- 「偶数性の導出に関する帰納法」ともいう

日本語だと…

定理: 自然数 n が偶数ならば, ある k について $n = \mathit{double} k$ である.

証明: $\mathit{ev} n$ の導出に関する帰納法. 最後の規則について場合分け.

- ev_0 の場合. この時 $n = 0$. $k = 0$ とすればよい.
- ev_{SS} の場合, この時ある n' について $n = S(S n')$ かつ $\mathit{ev} n'$ である. 帰納法の仮定より, ある k' について $n' = \mathit{double} k'$ である.
 $\mathit{double} (S k') = S(S(\mathit{double} k')) = S(S n') = n$ となるので, $k = S(k')$ とすればよい. (証明終)

IndProp.v

- 帰納的に定義される命題
- 証明オブジェクトを証明で使う
 - ▶ 導出についての inversion
 - ▶ 導出についての帰納法
- (帰納的に定義される) 関係
- ケーススタディ: 正則表現
- ケーススタディ: reflection の改良

命題としての関係

- 一引数の命題 (一引数述語): 「もの」の性質を表す
 - ▶ ev など
- 二引数の命題 (二引数述語): 「もの」と「もの」の関係を表す
 - ▶ $=$

関係「以下」の帰納的定義

```
Inductive le : nat -> nat -> Prop :=
  | le_n (n : nat) : le n n
  | le_S (n m : nat) (H : le n m) : le n (S m).
Notation "m <= n" := (le m n).
```

導出規則:

$$\frac{}{n \leq n} \quad (\text{LE-N})$$

$$\frac{n \leq m}{n \leq S m} \quad (\text{LE-S})$$

「以下」に関する証明

基本的には `ev` と同じ:

- ゴールにあるならコンストラクタを `apply`
- 文脈にあるなら `inversion`

```
Theorem test_le1 : 3 <= 3.
```

```
Proof. apply le_n. Qed.
```

```
Theorem test_le2 : 3 <= 6.
```

```
Proof.
```

```
  apply le_S. apply le_S.
```

```
  apply le_S. apply le_n. Qed.
```


Theorem test_le3 : (2 <= 1) -> 2 + 2 = 5.

Proof.

intros H.

inversion H. inversion H2. Qed.

「未満」の定義

Definition `lt (n m:nat) := le (S n) m.`

Notation "`m < n`" := `(lt m n)`.

- `le` を使わずに直接帰納的な定義をしたら？

IndProp.v

- 帰納的に定義される命題
- 証明オブジェクトを証明で使う
 - ▶ 導出についての inversion
 - ▶ 導出についての 帰納法
- (帰納的に定義される) 関係
- ケーススタディ: 正則表現
- ケーススタディ: reflection の改良

正則(正規)表現

文字列集合を表す記法

- 空集合
- 空文字列 ε
- 文字
- 連結
- 和
- 繰り返し

正則言語(有限状態オートマトンが受理する言語)と対応

アルファベット T 上の正則表現を表す型 $\text{reg_exp } T$:

```
Inductive reg_exp (T : Type) : Type :=
| EmptySet
| EmptyStr
| Char (t : T)
| App (r1 r2 : reg_exp T)
| Union (r1 r2 : reg_exp T)
| Star (r : reg_exp T).
```

- 通常 T は有限だが, その制限は表現されていない

文字列のマッチ

$s \sim re \dots$ 「文字列 $s : list\ T$ が $re : reg_exp\ T$ にマッチする」

$$\overline{[]} = \sim \varepsilon \quad (\text{MEMPTY})$$

$$\overline{[x]} = \sim \text{Char } x \quad (\text{MCHAR})$$

$$\frac{s_1 \sim re_1 \quad s_2 \sim re_2}{s_1 ++ s_2 \sim \text{App } re_1\ re_2} \quad (\text{MAPP})$$

$$\frac{s_1 =^{\sim} re_1}{s_1 =^{\sim} \text{Union } re_1 re_2} \quad (\text{MUNIONL})$$

$$\frac{s_2 =^{\sim} re_2}{s_2 =^{\sim} \text{Union } re_1 re_2} \quad (\text{MUNIONR})$$

$$\frac{}{[] =^{\sim} \text{Star } re} \quad (\text{MSTAR0})$$

$$\frac{s_1 =^{\sim} re \quad s_2 =^{\sim} \text{Star } re}{s_1 ++ s_2 =^{\sim} \text{Star } re} \quad (\text{MSTARAPP})$$

帰納的命題による定義

Reserved Notation "s =~ re" (at level 80).

(* 定義前に演算子を「予約」する *)

Inductive exp_match {T} :

list T -> reg_exp T -> Prop :=

| MEmpty : [] =~ EmptyStr

| MChar (x : T) : [x] =~ (Char x)

| MApp s1 re1 s2 re2

(H1 : s1 =~ re1)

(H2 : s2 =~ re2)

: (s1 ++ s2) =~ (App re1 re2)

...


```

...
| MUnionL s1 re1 re2
      (H1 : s1 =~ re1)
      : s1 =~ (Union re1 re2)
| MUnionR re1 s2 re2
      (H1 : s2 =~ re2)
      : s2 =~ (Union re1 re2)
| MStar0 re : [] =~ (Star re)
| MStarApp s1 s2 re
      (H1 : s1 =~ re)
      (H2 : s2 =~ (Star re))
      : (s1 ++ s2) =~ (Star re)

where "s =~ re" := (exp_match s re).

```

- EmptySet についての規則はない
- Union, Star についての規則がふたつずつ

マッチの具体例

Example `reg_exp_ex1` :

`[1] =~ Char 1.`

Proof.

`apply MChar.`

Qed.

Example `reg_exp_ex2` :

`[1; 2] =~ App (Char 1) (Char 2).`

Proof.

`apply (MApp [1] _ [2]).`

`- apply MChar.`

`- apply MChar.`

Qed.

Lemma MStar1 : forall T s (re : reg_exp T),
s =~ re -> s =~ Star re.

Lemma empty_is_empty : forall T (s : list T),
~ (s =~ EmptySet).

Lemma MUnion' :
forall T (s : list T) (re1 re2 : reg_exp T),
s =~ re1 \ / s =~ re2 ->
s =~ Union re1 re2.

Lemma MStar' : forall T (ss : list (list T)) (re
(forall s, In s ss -> s =~ re) ->
fold app ss [] =~ Star re.

IndProp.v

- 帰納的に定義される命題
- 証明オブジェクトを証明で使う
 - ▶ 導出についての inversion
 - ▶ 導出についての帰納法
- (帰納的に定義される) 関係
- ケーススタディ: 正則表現
- ケーススタディ: reflection の改良

復習: reflection

命題 P と $b = true$ との同値性が成立する時, b は P を反映している, という

```
Theorem eqb_eq : forall n m : nat,  
  n =? m = true <-> n = m.
```

以下のような, `=?` を使った定理の証明に役立つ

```
Theorem filter_not_empty_In : forall n l,  
  filter (fun x => n =? x) l <> [] -> In n l.
```

一般化: 述語 `reflect`

```
Inductive reflect (P : Prop) : bool -> Prop :=  
| ReflectT (H : P) : reflect P true  
| ReflectF (H : ~ P) : reflect P false.
```

b が P を反映することと $\text{reflect } P b$ は同値

```
Theorem iff_reflect : forall P b,  
  (P <-> b = true) -> reflect P b.
```

```
Theorem reflect_iff : forall P b,  
  reflect P b -> (P <-> b = true).
```

というわけで，以下のふたつの定理は同じこと．

```
Theorem eqb_eq : forall n m : nat,  
  n =? m = true <-> n = m.
```

```
Theorem eqbP : forall n m : nat,  
  reflect (n = m) (n =? m = true).
```


再証明

Theorem `filter_not_empty_In` : forall n l,
 filter (fun x => n =? x) l <> [] -> In n l.

Proof.

```
intros n l. induction l as [| m l' IHl'].  
- (* l = [] *)  
  simpl. intros H. apply H. reflexivity.  
- (* l = m :: l' *)  
  simpl. destruct (eqbP n m) as [H | H].  
  + (* n = m *)  
    intros _. rewrite H. left. reflexivity.  
  + (* n <> m *)  
    intros H'. right. apply IHl'. apply H'.
```

Qed.

reflection のご利益

- 少し証明がすっきりする
- 反映可能な命題についてはできるだけ reflect を使うようにすると、積み重ねで証明がかなりすっきりすることが知られている
- Coq ライブラリ SSReflect で推奨されている証明スタイル
 - ▶ 四色問題は SSReflect で証明された
- 教科書の第二部 (本講義では扱いません) ではかなり使う

宿題： / 午前10:30 締切

- Exercise: `ev_double (1)`, `inversion_practice (1)`, `ev_sum (2)`, `le_and_lt_facts (5)` の `le_trans`, `0_le_n`, `le_plus_1`
- 解答が記入された `IndProp.v` を `origin/master` に push