

# 「計算と論理」

## Software Foundations

### その6

五十嵐 淳

cal23@fos.kuis.kyoto-u.ac.jp

<http://www.fos.kuis.kyoto-u.ac.jp/~igarashi/class/cal/>

京都大学

December 5, 2023

# Logic.v

- 命題
- 論理結合子
- 命題を使ったプログラム
- 定理の引数への適用
- Coq vs. 集合論

# 命題

Coq では、命題も (プログラムと同じく) 項の一種.  
“Prop” 型を持つ.

```
Coq < Check 3=3.
```

```
3 = 3
```

```
  : Prop
```

```
Coq < Check (forall n m :nat, n + m = m + n).
```

```
forall n m : nat, n + m = m + n
```

```
  : Prop
```

```
Coq < Check (forall (n:nat) (b:bool), n = b).
```

```
Toplevel input, characters 36-37:
```

```
> Check (forall (n:nat) (b:bool), n = b).
```

```
>
```

```
Error:
```

```
In environment
```

```
n : nat
```

# 命題

ただし,

項が Prop 型を持つ  $\nRightarrow$  その項が表す命題が証明可能

Coq < Check 2=3.

2 = 3

: Prop

Coq < Check (forall (n:nat), n = 2).

forall n : nat, n = 2

: Prop

# 命題を定義する

```
Definition plus_claim : Prop := 2 + 2 = 4.
```

```
Theorem plus_claim_is_true : plus_claim.
```

```
Proof. reflexivity. Qed.
```

# パラメータ化された命題

述語 (predicate) とは、引数を受け取って命題を返す関数

```
Coq < Definition is_three (n : nat) : Prop := n = 3.  
is_three is defined
```

```
Coq < Check is_three.  
is_three  
      : nat -> Prop
```

$n = m$  は `eq n m` の構文糖衣:

```
Coq < Check @eq.  
@eq  
      : forall A : Type, A -> A -> Prop
```

`eq` の型引数  $A$  は省略可能

## 述語「 $f$ は単射である」

Definition injective  $\{A B\}$   $(f : A \rightarrow B) :=$   
forall  $x y : A, f x = f y \rightarrow x = y.$

Lemma succ\_inj : injective S.

Proof.

intros n m H. injection H as H1. apply H1.

Qed.

# Logic.v

- 命題
- 論理結合子
  - ▶ 連言 (「かつ」)
  - ▶ 選言 (「または」)
  - ▶ 偽 (矛盾) と否定 (「～でない」)
  - ▶ 真
  - ▶ 論理的同値 (if and only if)
  - ▶ 存在量化 (「ある  $x$  が存在して～」)
- 命題を使ったプログラム
- 定理の引数への適用
- Coq vs. 集合論



# 連言 (conjunction)

$A \wedge B$  … 「 $A$ かつ $B$ 」

- $A \wedge B$  を証明するためには  $A$  と  $B$  をそれぞれ証明する
- split タクティックでゴールをふたつに分割

Example and\_example :  $3 + 4 = 7 \wedge 2 * 2 = 4$ .

Proof.

split.

- (\*  $3 + 4 = 7$  \*) reflexivity.

- (\*  $2 + 2 = 4$  \*) reflexivity.

Qed.

# 連言の導入

```
Lemma and_intro : forall A B : Prop,  
  A -> B -> A /\ B.
```

Proof.

```
  intros A B HA HB. split.  
  - apply HA.  
  - apply HB.
```

Qed.

- 「任意の命題  $A, B$  について」は(おそらく)初出
  - ▶ でも意味はわかりますね？
- `split` と `apply and_intro` は実質同じ。

# 連言を使って何かいう

仮定にある  $A \wedge B$  は `destruct` でふたつの仮定  $A$  と  $B$  に分解できる.

```
Lemma and_example2 : forall n m: nat,  
  n = 0 /\ m = 0 -> n + m = 0.
```

Proof.

```
  intros n m H.
```

```
  destruct H as [Hn Hm].
```

```
  rewrite Hn. rewrite Hm.
```

```
  reflexivity.
```

Qed.

# 連言を經由して何かいう

Lemma and\_example3 :

```
forall n m : nat, n + m = 0 -> n * m = 0.
```

Proof.

```
(* WORKED IN CLASS *)
```

```
intros n m H.
```

```
apply and_exercise in H.
```

```
destruct H as [Hn Hm].
```

```
rewrite Hn. reflexivity.
```

Qed.

# 不要な conjunct を捨てる

```
Lemma proj1 : forall P Q : Prop,  
  P /\ Q -> P.
```

Proof.

```
  intros P Q H.  destruct H as [HP _].  
  apply HP.  Qed.
```

# Logic.v

- 命題
- 論理結合子
  - ▶ 連言 (「かつ」)
  - ▶ 選言 (「または」)
  - ▶ 偽 (矛盾) と否定 (「～でない」)
  - ▶ 真
  - ▶ 論理的同値 (if and only if)
  - ▶ 存在量化 (「ある  $x$  が存在して～」)
- 命題を使ったプログラム
- 定理の引数への適用
- Coq vs. 集合論

# 選言 (disjunction)

$A \vee B$  … 「 $A$ または $B$ 」

「または」から何かを言うには `destruct` で場合分けをする:

```
Lemma factor_is_0 : forall n m: nat,  
  n = 0 \vee m = 0 -> n * m = 0.
```

Proof.

```
intros n m H. destruct H as [Hn | Hm].  
- (* Here, n = 0 *)  
  rewrite Hn. reflexivity.  
- (* Here, m = 0 *)  
  rewrite Hm. rewrite <- mult_n_0.  
  reflexivity.
```

Qed.

# 選言の導入

タクテック left と right

```
Lemma or_intro_l :
```

```
  forall A B : Prop, A -> A \/ B.
```

```
Proof.
```

```
  intros A B HA. left. apply HA. Qed.
```

```
Lemma zero_or_succ :
```

```
  forall n : nat, n = 0 \/ n = S (pred n).
```

```
Proof.
```

```
  intros [|n].
```

```
  - left. reflexivity.
```

```
  - right. reflexivity.
```

```
Qed.
```



# ところで

- $P \wedge Q$  は *and*  $P Q$  の略記
- 同様に  $P \vee Q$  は *or*  $P Q$  の略記
- *and*, *or* は命題ふたつを受けとって命題を返す関数型を持つ

Coq < Check and.

*and*

$: Prop \rightarrow Prop \rightarrow Prop$

Coq < Check or.

*or*

$: Prop \rightarrow Prop \rightarrow Prop$

# Logic.v

- 命題
- 論理結合子
  - ▶ 連言 (「かつ」)
  - ▶ 選言 (「または」)
  - ▶ 偽 (矛盾) と否定 (「 $\sim$ でない」)
    - ★ 不等号 (等しくない)
  - ▶ 真
  - ▶ 論理的同値 (if and only if)
  - ▶ 存在量化 (「ある  $x$  が存在して $\sim$ 」)
- 命題を使ったプログラム
- 定理の引数への適用
- Coq vs. 集合論

# 否定と矛盾

「 $P$ ではない」 ( $\neg P$ , Coq では  $\sim P$ ) の定義

```
Definition not (P:Prop) := P -> False.  
(* False: 「矛盾」「偽」を表す特殊な命題 *)  
(* 「P ではない」 = P を仮定すると矛盾する *)  
(* not : Prop -> Prop  
   命題を受け取って命題を返す関数! *)
```

```
Notation "~ x" := (not x) : type_scope.
```

# 爆発則

矛盾からは何でもいえる:

```
Theorem ex_falso_quodlibet : forall (P:Prop),  
  False -> P.
```

Proof.

```
  intros P contra.  
  destruct contra. Qed.
```

- ここで destruct は discriminate と同様な働き
  - ▶ discriminate は矛盾した等号に使う
  - ▶ 微妙な違いの理由はもう少し先 (IndPropあたり?) に進むとわかる

# 否定の証明 (1)

否定の証明は (False を導くことになるので) 少しコツが必要なことも.

```
Theorem not_False : ~ False.
```

```
Proof.
```

```
  unfold not. intros H. destruct H. Qed.
```

```
Theorem contradiction_implies_anything :
```

```
  forall P Q : Prop, (P /\ ~P) -> Q.
```

```
Proof.
```

```
  intros P Q [HP HNP].
```

```
  unfold not in HNP.
```

```
  apply HNP in HP. destruct HP. Qed.
```

## 否定の証明 (2)

```
Theorem double_neg : forall P : Prop,  
  P -> ~~P.
```

Proof.

```
  intros P H. unfold not.
```

```
  intros G. apply G. apply H. Qed.
```

# 不等号

$x <> y$  は  $\neg(x = y)$  のこと:

```
Notation "x <> y" := (~ (x = y)) : type_scope.
```

```
Theorem zero_not_one : 0 <> 1.
```

```
Proof.
```

```
  unfold not. (* expands to (0 = 1) -> False *)
```

```
  intros contra. discriminate contra.
```

```
Qed.
```

Theorem `not_true_is_false` : forall b : bool,  
b <> true -> b = false.

Proof.

```
intros [] H. (* implicitly destruct b *)
- (* b = true *)
  unfold not in H.
  apply ex_falso_quodlibet.
  (* or use tactic exfalso. *)
  apply H. reflexivity.
- (* b = false *)
  reflexivity.
```

Qed.



# Logic.v

- 命題
- 論理結合子
  - ▶ 連言 (「かつ」)
  - ▶ 選言 (「または」)
  - ▶ 偽 (矛盾) と否定 (「～でない」)
  - ▶ 真
  - ▶ 論理的同値 (if and only if)
  - ▶ 存在量化 (「ある  $x$  が存在して～」)
- 命題を使ったプログラム
- 定理の引数への適用
- Coq vs. 集合論

# 真

- 真 (自明な命題) を表す命題: True
- 公理 I : True

```
Lemma True_is_true : True.  
Proof. apply I. Qed.
```

「使い道なさそうですが…」 → 教科書に「あとで使い道がでてきます」と書いてあるけど, (少なくともこの章では) 出てこない…

# 異なるコンストラクタは等しくない

```
Definition disc_fn (n: nat) : Prop :=  
  match n with  
  | 0 => True  
  | S _ => False  
end.
```

Theorem disc\_example : forall n, ~ (0 = S n).

Proof.

```
  intros n H1.
```

```
  assert (H2 : disc_fn 0).  simpl. apply I.
```

```
  rewrite H1 in H2. simpl in H2. apply H2.
```

Qed.

# Logic.v

- 命題
- 論理結合子
  - ▶ 連言 (「かつ」)
  - ▶ 選言 (「または」)
  - ▶ 偽 (矛盾) と否定 (「～でない」)
  - ▶ 真
  - ▶ 論理的同値 (if and only if)
  - ▶ 存在量化 (「ある  $x$  が存在して～」)
- 命題を使ったプログラム
- 定理の引数への適用
- Coq vs. 集合論

# (論理的) 同値

同値 (if and only if) は、両方向の含意の連言:

```
Definition iff (P Q : Prop) :=  
  (P -> Q) /\ (Q -> P).
```

```
Notation "P <-> Q" := (iff P Q)  
  (at level 95, no associativity) : type_scope.
```

# 同値性に関する性質

## 対称性

```
Theorem iff_sym : forall P Q : Prop,  
  (P <-> Q) -> (Q <-> P).
```

Proof.

```
  intros P Q [HPQ HQP].  
  split.  
  - (* -> *) apply HQP.  
  - (* <- *) apply HPQ.   Qed.
```

Qed.

反射性, 推移性もいえる, つまり iff は命題上の同値関係

# 命題同士の「等しさ」としての iff

いくつかのタクティック (reflexivity, rewrite) では  
iff を  $=$  と同じように扱うことができる  
要おまじない (ライブラリのロード):

```
Require Import Coq.Setoids.Setoid.
```

Lemma mul\_eq\_0 : forall n m,  
n \* m = 0 <-> n = 0 \\/ m = 0.

Lemma or\_assoc : forall P Q R : Prop,  
P \\/ (Q \\/ R) <-> (P \\/ Q) \\/ R.

Lemma mul\_eq\_0\_ternary : forall n m p,  
n \* m \* p = 0 <-> n = 0 \\/ m = 0 \\/ p = 0.

Proof.

intros n m p.

rewrite mul\_eq\_0. rewrite mul\_eq\_0.

rewrite or\_assoc.

reflexivity.

Qed.



apply で  $\leftrightarrow$  命題を使うと、「ならば」の方向をいい感じに選んでくれる.

```
Lemma apply_iff_example :
```

```
  forall n m : nat, n * m = 0 -> n = 0 \ / m = 0
```

```
Proof.
```

```
  intros n m H. apply mul_eq_0. apply H.
```

```
Qed.
```

# Logic.v

- 命題
- 論理結合子
  - ▶ 連言 (「かつ」)
  - ▶ 選言 (「または」)
  - ▶ 偽 (矛盾) と否定 (「 $\sim$ でない」)
  - ▶ 真
  - ▶ 論理的同値 (if and only if)
  - ▶ 存在量化 (「ある  $x$  が存在して $\sim$ 」)
- 命題を使ったプログラム
- 定理の引数への適用
- Coq vs. 集合論

# 存在量化 a.k.a 特称量化

$\exists x : X.P \dots$  「型  $X$  の要素  $x$  が存在して  $P$ 」

Lemma four\_is\_even:

exists n : nat, 4 = n + n.

Proof.

exists 2. reflexivity.

Qed.

- 「存在の証拠」 (witness) を指定する exists
- 引き続き, その証拠が性質  $P$  を満たすことを証明する

# 存在量化から何かいう

文脈に存在量化  $\exists x.P$  がある時は `destruct` を使う

- (正体はわからない)「存在の証拠」 $x$ と
- それが性質  $P$  を満たす, という仮定が得られる

```
Theorem exists_example_2 : forall n,  
  (exists m, n = 4 + m) ->  
  (exists o, n = 2 + o).
```

Proof.

```
  intros n H.  
  destruct H as [m Hm].  
  (* witness に intro パターンで名前をつける *)  
  exists (2 + m).  apply Hm.  Qed.
```

# Logic.v

- 命題
- 論理結合子
- 命題を使ったプログラム
- 定理の引数への適用
- Coq vs. 集合論

# 命題を返す再帰的関数

「 $x$  はリスト  $l$  の要素である」ことを表す再帰的命題

```
Fixpoint In {A : Type}
  (x : A) (l : list A) : Prop :=
  match l with
  | [] => False
  | x' :: l' => x' = x \/ In x l'
  end.
```

- $x$  は第一要素と等しい, または,
- $x$  は第二要素と等しい, または...

Example In\_example\_1 : In 4 [1; 2; 3; 4; 5].

Proof.

simpl. right. right. right. left.

reflexivity.

Qed.

```
Example In_example_2 : forall n,  
  In n [2; 4] -> exists n', n = 2 * n'.  
Proof.  
  simpl.  
  intros n H.  destruct H as [H1 | [H2 | []]].  
  - exists 1. rewrite <- H1. reflexivity.  
  - exists 2. rewrite <- H2. reflexivity.  
Qed.
```

- ネストした intro パターン



Theorem In\_map :

```
forall (A B : Type)
  (f : A -> B) (l : list A) (x : A),
  In x l ->
  In (f x) (map f l).
```

Proof.

```
intros A B f l x.
induction l as [|x' l' IHl'].
- (* l = nil, contradiction *)
  simpl. intros [].
- (* l = x' :: l' *)
  simpl. intros [H | H].
  + rewrite H. left. reflexivity.
  + right. apply IHl'. apply H.
```

Qed.

再帰を使った述語定義は便利だが欠点もある

- 「明らかに止まる」再帰しか書けない
- 次の章で扱う「帰納的な述語定義」を待て
  - ▶ これにも長所・短所がある

# Logic.v

- 命題
- 論理結合子
- 命題を使ったプログラム
- 定理の引数への適用
- Coq vs. 集合論

# 証明も第一級データ

## Check コマンドの挙動

```
Coq < Check 1.
```

```
1
```

```
   : nat
```

```
Coq < Check add_comm.
```

```
add_comm
```

```
   : forall n m : nat, n + m = m + n
```

- 定理の文面があたかも何かの型であるかのよう？
- 実は…
  - ▶ `add_comm` は「証明オブジェクト」というデータ (の名前)
  - ▶ 証明オブジェクトの型は命題

# 型 = 命題!?

型はデータの使い方を規定する

- $\text{nat} \rightarrow \text{nat} \rightarrow \text{nat}$ 
  - ▶ ふたつの  $\text{nat}$  を引数として与えると,  $\text{nat}$  が得られる
- $\forall X : \text{Type}, X \rightarrow X$ 
  - ▶ 型  $T$  を引数として与えると,  $T \rightarrow T$  型の関数が得られる

# 命題をムリヤリ型っぽく読む

- $n = m \rightarrow n + n = m + m$ 
  - ▶  $n = m$  の証明を引数として与えると,  
 $n + n = m + m$  の証明が得られる!?
- $\forall n : nat, 2 * n = n + n$ 
  - ▶ 自然数, 例えば **5** を引数として与えると  
 **$2 * 5 = 5 + 5$**  の証明が得られる!?

```
Coq < Check (add_comm 3).
```

```
add_comm 3
```

```
  : forall m : nat, 3 + m = m + 3
```

```
Coq < Check (add_comm 3 5).
```

```
add_comm 3 5
```

```
  : 3 + 5 = 5 + 3
```

# 足し算の交換則を使った証明ふたたび

```
Lemma add_comm3_take3 :
```

```
  forall n m p, n + (m + p) = (p + m) + n.
```

```
Proof.
```

```
  intros n m p.
```

```
  rewrite add_comm.
```

```
  rewrite (add_comm m p).
```

```
  reflexivity.
```

```
Qed.
```

assert を使うよりエレガントでしょ？

## (参考: assert を使った証明)

```
Lemma add_comm3_take2 :
```

```
  forall n m p, n + (m + p) = (p + m) + n.
```

```
Proof.
```

```
  intros n m p.
```

```
  rewrite add_comm.
```

```
  assert (H : m + p = p + m).
```

```
  { rewrite add_comm. reflexivity. }
```

```
  rewrite H.
```

```
  reflexivity.
```

```
Qed.
```



## 別の(人工的な)例

```
Theorem in_not_nil :  
  forall A (x : A) (l : list A),  
    In x l -> l <> [].
```

(\* x = 42 に特化した文言 \*)

```
Lemma in_not_nil_42 :  
  forall l : list nat, In 42 l -> l <> [].
```

Proof.

```
  intros l H.  
  apply in_not_nil.  (* doesn't work! *)
```

# 4つの解決法

どれでも好きなものを使ってください。

```
apply in_not_nil with (x := 42).  apply H.  
apply in_not_nil in H.  apply H.  
apply (in_not_nil nat 42).  apply H.  
apply (in_not_nil _ _ _ H).
```

最後のは型推論で紹介したのと同じ仕組み (推論されるのが型だけではないですが)

# Logic.v

- 命題
- 論理結合子
- 命題を使ったプログラム
- 定理の引数への適用
- Coq vs. 集合論
  - ▶ 関数の外延性
  - ▶ 命題と真偽値
  - ▶ 古典論理 vs. 構成的論理

# 集合 $\doteq$ 述語？

- $x$  が集合  $X$  の要素である
  - ▶ 2 は偶数の集合の要素である
- $x$  は性質  $X$  を満たす (命題  $X(x)$  が成立する)

```
Definition ev (n:nat) : Prop :=
```

```
  even n = true.
```

```
Check (ev 2).
```

```
ev 2 : Prop (* 2 は偶数である *)
```

Coq の論理と集合論は似ているが重要な違いもある

# 関数の等しさ

## Coqでの関数の等しさの定義

$f, g : X \rightarrow Y$  が等しい  $\stackrel{def}{\iff} f \leftrightarrow g$

- $\leftrightarrow$  は簡約による等しさ

```
Example function_equality_ex1 :
```

```
(fun x => 3 + x) = (fun x => (pred 4) + x).
```

```
Proof. reflexivity. Qed.
```

## 集合論での関数の等しさの定義

$f, g : X \rightarrow Y$  が等しい  $\stackrel{\text{def}}{\iff} \forall x \in X, f(x) = g(x)$

- 入出力の関係だけみる
- 関数の外延性 (extensionality) 原理ともいう。

Example function\_equality\_ex2 :

```
(fun x => x + 1) = (fun x => 1 + x).
```

Proof.

(\* Stuck \*)

Abort.

# 外延性の公理の追加

Axiom コマンド (証明なしで使える命題の追加)

```
Axiom functional_extensionality :  
  forall {X Y: Type} {f g : X -> Y},  
    (forall (x:X), f x = g x) -> f = g.
```

```
Example function_equality_ex2 :  
  (fun x => x + 1) = (fun x => 1 + x).
```

Proof.

```
  apply functional_extensionality. intros x.  
  apply add_comm.
```

Qed.

# 補足

Q rewrite add\_comm で解決できなかったの？

A fun x の外側から見ると、 $x + 1$  は (型がついた) 式ではないのでダメなのなのです ( $x$  が文脈にないので).



# 公理の追加について

- 何でもかんでも追加してよいわけではない
- 体系が矛盾する (何でも証明できる) 危険性
- 矛盾しないことを示すのは大変
- 関数の外延性公理は追加しても矛盾しないことが知られている
- Print Assumptions 定理名. で, 定理の証明に使った公理がわかる

# Logic.v

- 命題
- 論理結合子
- 命題を使ったプログラム
- 定理の引数への適用
- Coq vs. 集合論
  - ▶ 関数の外延性
  - ▶ 命題と真偽値
  - ▶ 古典論理 vs. 構成的論理

# 命題と真偽値

性質を記述するふたつの方法: 真偽値 (`bool`) と命題 (`Prop`)

例: 自然数の等しさ  $n1 =? n2$  と  $n1 = n2$

	<i>bool</i>	<i>Prop</i>
決定可能?	yes	no
<i>match</i> で使える?	yes	no
<i>rewrite</i> で使える?	no	yes

# 決定可能性について

- (空の文脈での) `bool` 型の式を計算すると必ず *true/false* のいずれかが得られる
- 決定不能な性質を判定する関数は書けない
- `Prop` 型の命題の真偽を判定することは (一般には) できない
- 決定不能な性質を `Prop` 型の命題で表すことはできる

# match, rewrite で使える / ない

- 命題は match で使えない

(\* これはダメ! \*)

```
Definition is_even_prime n :=  
  if n = 2 then true  
  else false.
```

- 真偽値は rewrite で使えない
  - ▶ 文脈に  $H : n = ?m = true$  があっても rewrite H. はできない.

# 決定可能な述語について

例 1:  $n$  は偶数である

- $even\ n$  が  $true$  を返す
- ある  $k$  が存在して,  $double\ k = n$

この場合, ふたつの言い方は等価

```
Definition Even x := exists k : nat, x = double k
Theorem even_bool_prop : forall n,
  even n = true <-> Even n.
```

真偽値  $even\ n$  は命題  $Even\ n$  (の真偽) を  
反映 (reflect) している, という

例2: 自然数  $n_1$  と  $m_1$  は等しい

- 関数呼出し  $n_1 =? m_1$  が *true* を返す
- $n_1 = m_1$

Theorem eqb\_eq : forall n1 n2 : nat,  
(n1 =? n2) = true <-> n1 = n2.

# Proof by reflection

命題を，それを反映する真偽値式に置き換えて，計算によって証明する。

ふつうの(?)証明

```
Example even_1000 : Even 1000.
```

```
Proof. unfold Even.
```

```
  exists 500. (* まず k を見つける *)
```

```
  reflexivity. Qed.
```

reflection による証明

```
Example even_1000'' : Even 1000.
```

```
Proof. apply even_bool_prop. reflexivity. Qed.
```

一般に reflection による証明の方が，かなり単純になる



```
Example not_even_1001 : even 1001 = false.  
Proof. reflexivity. Qed.
```

```
Example not_even_1001' : ~(Even 1001).  
Proof. unfold Even.  
      rewrite <- even_bool_prop.  
      unfold not.  
      simpl.  
      intro H.  
      discriminate H.  
Qed.
```

even\_bool\_prop を使わない証明は難しそう…

# 逆に命題の “=” が嬉しい例

```
Lemma plus_eqb_example : forall n m p : nat,  
  n =? m = true -> n + p =? m + p = true.
```

Proof.

```
  intros n m p H.  
  rewrite eqb_eq in H.  
  rewrite H.  
  rewrite eqb_eq.  
  reflexivity.
```

Qed.

- 状況によって命題の “=” と真偽値を行ったり来たりするのがミソ
- 大規模証明で役に立つテクニック

# Logic.v

- 命題
- 論理結合子
- 命題を使ったプログラム
- 定理の引数への適用
- Coq vs. 集合論
  - ▶ 関数の外延性
  - ▶ 命題と真偽値
  - ▶ 古典論理 vs. 構成的論理

# 排中律

「どんな命題でもその肯定か否定のどちらかは成立する」

```
Definition excluded_middle :=  
  forall P : Prop, P \/ ~ P.
```

は Coq では証明できない!

- 証明する立場に立つと、肯定・否定どちらを証明するか left, right で選ばなければいけない
- …がどちらを使えばよいかは P に依存するので一般にはわからない
  - ▶ これも、与えられた命題の真偽を判定する一般的な方法(アルゴリズム)がないことと関係

# 限定された排中律 (1)

真偽値で reflect できる場合:

```
Theorem restricted_excluded_middle :  
  forall P b,  
    (P <-> b = true) -> P \/ ~ P.
```

Proof.

```
intros P b H. destruct b.  
- left. rewrite H. reflexivity.  
- right. rewrite H.  
  intros contra. destruct contra.
```

Qed.

## 限定された排中律 (2)

等号についての排中律:

```
Theorem restricted_excluded_middle_eq :  
  forall (n m : nat), n = m \/ n <> m.
```

Proof.

```
  intros n m.
```

```
  apply
```

```
    (restricted_excluded_middle (n = m)  
                                   (n =? m)).
```

```
  symmetry.
```

```
  apply eqb_eq.
```

Qed.

# 構成的論理 (constructive logic)

排中律がないおかげ・せいで、

- 存在 ( $\exists x, P x$ ) の証明ができたなら、「何が  $P$  を満たすのか」を証明中に見つけ出すことができる。
  - ▶ 存在証明は「 $P$  を満たす何か」を作る (構成する) 必要がある
  - ▶ (存在証明を「存在しないわけがない」で済ませられない — 解析学の「中間値の定理」など)
- 逆に、いくつかの証明が困難 (場合によっては不可能) になる

- 排中律を認めない論理：構成的論理
- 排中律を (任意の命題に) 認める論理：古典論理 (classical logic)

# 構成的でない存在証明の例

$a^b$  が有理数であるような無理数の組  $a, b$  が存在する

(証明)  $\sqrt{2}$  は無理数である。もし、 $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$  が有理数ならば、 $a = b = \sqrt{2}$  とすればよい。そうでなければ、 $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ ,  $b = \sqrt{2}$  とすると、 $a^b = \sqrt{2}^{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2$  と、有理数になる。

(どこで排中律を使ったかわかりますか?)



# 構成的論理では認めない他の原理

## 2重否定の除去 (狭義の背理法)

任意の命題  $P$  について,  $P$  の否定を仮定して矛盾が導けたら  $P$  である, といってよい

```
Theorem classic_double_neg : forall P : Prop,  
  ~~P -> P.
```

Proof.

```
  intros P H. unfold not in H.
```

```
  (* But now what? There is no way to  
    "invent" evidence for [P]. *)
```

```
  Abort.
```

# 構成的論理では成立しない古典論理公理

- パース則 (Peirce's law):  $((P \rightarrow Q) \rightarrow P) \rightarrow P$
- 排中律:  $P \vee \neg P$ 
  - ▶ ただし,  $\neg\neg(P \vee \neg P)$  は成立
- ド・モルガン則 (の一部):
  - ▶  $\neg(\neg P \wedge \neg Q) \rightarrow P \vee Q$
- $(P \rightarrow Q) \rightarrow (\neg P \vee Q)$

# 宿題： / 午前10:30 締切

- Exercise: `and_assoc` (2), `contrapositive` (2), `not_both_true_and_false` (1), `or_distributes_over_and` (3), `dist_exists_or` (2), `In_app_iff` (2), `logical_connectives` (2)
- 解答が記入された `Logic.v` を `origin/main` に push
- **PandA のテスト・クイズ**に回答: