

「計算と論理」

Software Foundations

その3

五十嵐 淳

cal23@fos.kuis.kyoto-u.ac.jp

京都大学

October 31, 2023

Lists.v

- 自然数のペア (ふたつ組)
- 自然数リスト
- リストに関する推論
- オプション型
- 「辞書」のデータ表現

自然数のペア

引数がふたつ (以上) のコンストラクタを使った型定義

```
Inductive natprod : Type :=  
| pair (n1 n2 : nat).
```

- コンストラクタがひとつだけの型
- `pair`: 自然数ふたつをとって `natprod` を作る
 - ▶ `pair 1 2` : `natprod`
 - ▶ `pair (4 + 3) 2` : `natprod`
 - ▶ `natprod` 型の式 (の値) は必ず `pair M N` の形をしている
- `product` ... (集合の) デカルト積

射影: 要素の取り出し関数

```
Definition fst (p : natprod) : nat :=  
  match p with  
  | pair x y => x (* パターンの新記法! *)  
  end.
```

```
Definition snd (p : natprod) : nat :=  
  match p with  
  | pair x y => y  
  end.
```

- `fst` ... 第一射影 (first projection)
- `snd` ... 第二射影 (second projection)

Notation による見慣れた表記の導入

```
Notation "( x , y )" := (pair x y).
```

```
Definition fst' (p : natprod) : nat :=  
  match p with  
  | (x,y) => x  (* パターンでも使える! *)  
end.
```

```
Definition swap_pair (p : natprod) : natprod :=  
  match p with  
  | (x,y) => (y,x)  
end.
```

ペアに関する簡単な性質の証明

定理: Surjectivity of pairing

任意の $p : \mathit{natprod}$ は, その第一・第二射影の組と等しい (すなわち, 組を作る操作は全射になっている.)

Coq による表現その1

Theorem surjective_pairing' :

forall (n m : nat),

(n,m) = (fst (n,m), snd (n,m)).

Proof. reflexivity. Qed.

より自然な文言

その2

Theorem surjective_pairing :

```
forall (p : natprod), p = (fst p, snd p).
```

Proof.

```
intros p. destruct p as [n m]. reflexivity.
```

Qed.

- コンストラクタがひとつしかないけれど場合分け
 - ▶ `natprod` なら必ず組の形 (n,m) をしている
- 変数を複数導入するイントロパターン
 - ▶ 既に `induction` の用例で出てきていますが…

Lists.v

- 自然数のペア (ふたつ組)
- 自然数リスト
- リストに関する推論
- オプション型
- 「辞書」のデータ表現

リストとは？

「もの」(要素)を一行に並べたような集まりを表す
データ

リストの作り方:

- 空リスト (nil) ← 全てのリストの種 (たね)
- 既存のリストの先頭へ要素を追加する (cons)

自然数リストの型定義

```
Inductive natlist : Type :=  
  | nil  
  | cons (n : nat) (l : natlist).
```

(自然数) リストの作り方:

- 空リスト (`nil`) はリストである
- 自然数 `n` を自然数リスト `l` の先頭に追加したものの (`cons n l`) はリストである

自然数との構造の類似に注意!

リスト表記

- `cons` の代わりにの右結合中置演算子 $n :: l$
 - 要素を列挙する表記 $[n; m; \dots]$
 - ▶ `.v` ファイルを直接読むと $[]$ がちょっと紛らわしい
- 以下は全て同じリストを定義している:

```
Definition mylist1 := 1 :: (2 :: (3 :: nil)).
```

```
Definition mylist2 := 1 :: 2 :: 3 :: nil.
```

```
Definition mylist3 := [1;2;3].
```

リスト操作関数(1): repeat

n が $count$ 個並んだリスト

```
Fixpoint repeat (n count : nat) : natlist :=
  match count with
  | 0 => []
  | S count' => n :: (repeat n count')
  end.
```

参考:

```
let rec repeat n count =
  if count = 0 then []
  else n :: repeat n (count - 1)
```

リスト操作関数(2): length

リストの長さ:

```
Fixpoint length (l:natlist) : nat :=  
  match l with  
  | nil => 0  
  | h :: t => S (length t)  
  end.
```

参考:

```
let rec length l =  
  match l with  
  | [] -> 0  
  | _ :: t -> length t + 1
```

リストを消費する関数を定義するコツ

- プログラムを書く前に, 入力例を沢山考えて, それぞれ出力が何になるべきかを理解する
 - ▶ 教科書であれば Example が提供されていることも
- 基本は `nil` の場合と `h :: t` の場合分け
 - ▶ リスト引数が複数ある場合, どちらで場合分けをするか悩ましいことがある \implies 色々な可能性を探る
- `h :: t` の場合, `t` に対して再帰呼び出しをした結果 (の意味) を プログラムは見ないでよく考える

リスト操作関数(3): app(end)

リストの連結

```
Fixpoint app (l1 l2 : natlist) : natlist :=
  match l1 with
  | nil      => l2
  | h :: t => h :: (app t l2)
  end.
```

参考:

```
let rec append l1 l2 =
  match l1 with
  | [] -> l2
  | h :: t -> h :: (append t l2)
```

app 11 12 の (右結合) 中置記法: 11 ++ 12

Example test_app1: [1;2;3] ++ [4] = [1;2;3;4].

Example test_app2: nil ++ [4;5] = [4;5].

Example test_app3: [1;2;3] ++ nil = [1;2;3].

リスト操作関数(4): hd, tl

```
Definition hd (default:nat) (l:natlist) : nat :=  
  match l with  
  | nil => default  
  | h :: t => h  
  end.
```

```
Definition tl (l:natlist) : natlist :=  
  match l with  
  | nil => nil  
  | h :: t => t  
  end.
```

- 引数が `nil` であってもエラーにできないので適当な値 (`default`) を返す

Lists.v

- 自然数のペア (ふたつ組)
- 自然数リスト
- リストに関する推論
- オプション型
- 「辞書」のデータ表現

リスト vs 自然数

```
Inductive natlist : Type :=  
  | nil  
  | cons (n : nat) (l : natlist).
```

と

```
Inductive nat : Type :=  
  | 0  
  | S (n : nat).
```

- 要素を無視して、構造だけ見れば同じ!

リスト vs 自然数 (2)

```
Fixpoint app (l1 l2 : natlist) : natlist :=  
  match l1 with  
  | nil      => l2  
  | cons h t => cons h (app t l2)  
  end.
```

と

```
Fixpoint plus (n m : nat) : nat :=  
  match n with  
  | 0 => m  
  | S n' => S (plus n' m)  
  end.
```

単純化による証明

```
Theorem nil_app : forall l:natlist,  
  [] ++ l = l.
```

Proof.

```
  intros l.  reflexivity.  Qed.
```

自然数の足し算と同じで以下はそう簡単ではない。

```
Theorem app_nil_r : forall l:natlist,  
  l ++ [] = l.
```

(あとまわし)

場合わけによる証明

```
Theorem tl_length_pred : forall l:natlist,  
  pred (length l) = length (tl l).
```

Proof.

```
  intros l. destruct l as [| n l'] eqn:E.  
  - (* l = nil *)  
    reflexivity.  
  - (* l = cons n l' *)  
    reflexivity. Qed.
```

- イントロパターンで $l = n :: l'$ を表現している
- 教科書は `eqn` を忘れている

リストに関する帰納法

$P(l)$ を (自然数) リスト l について述べた命題とする

リストに関する帰納法の原理

「任意のリスト l について $P(l)$ 」は以下と同値

- $P(\text{nil})$ かつ
- 任意の自然数 n , リスト l' について $P(l')$ ならば $P(n::l')$

単なる場合分けと違って, $P(n::l')$ を示すのに, ひとつ短かいリストでは P が成立していること (つまり $P(l')$) を仮定してよい

- $P(l')$ … 「帰納法の仮定」 (induction hypothesis, IH) と呼ぶ

復習・比較: 数学的帰納法

$P(n)$ を自然数の性質について述べた命題とする

数学的帰納法の原理

「任意の自然数 n について $P(n)$ 」は以下と同値

- $P(0)$ かつ
- 任意の自然数 n' について $P(n')$ ならば $P(S n')$

単なる場合分けと違って, $P(S n')$ を示すのに, ひとつ小さい数では P が成立していること (つまり $P(n')$) を仮定してよい

- $P(n')$ を「帰納法の仮定」 (induction hypothesis, IH) と呼ぶ

++ の結合律

```
Theorem app_assoc : forall l1 l2 l3 : natlist,  
  (l1 ++ l2) ++ l3 = l1 ++ (l2 ++ l3).
```

Proof.

```
intros l1 l2 l3.
```

```
induction l1 as [| n l1' IHl1'].
```

```
- (* l1 = nil *)
```

```
  reflexivity.
```

```
- (* l1 = cons n l1' *)
```

```
  simpl. rewrite -> IHl1'. reflexivity.
```

Qed.

- 足し算の結合律の証明と比較してみよう!

app の結合律の日本語による証明

定理: 任意の $I1, I2, I3$ について

$(I1 ++ I2) ++ I3 = I1 ++ (I2 ++ I3)$ である

証明: $I1$ についての帰納法.

- $I1 = []$ の場合.

$$([], ++ I2) ++ I3 = [] ++ (I2 ++ I3)$$

を示す必要があるが, これは $++$ の定義より明らか.

- $l1 = n :: l1'$ の場合. ただし,

$$(l1' ++ l2) ++ l3 = l1' ++ (l2 ++ l3)$$

とする.

$$((n :: l1') ++ l2) ++ l3 = (n :: l1') ++ (l2 ++ l3)$$

を示す必要があるが, $++$ の定義より, これは

$$n :: ((l1' ++ l2) ++ l3) = n :: (l1' ++ (l2 ++ l3))$$

と同値. これは帰納法の仮定より明らか. (証明終)

数学的帰納法による証明の雛形

定理: 任意の自然数 n について $P(n)$

証明: n に関する数学的帰納法による.

- $n = 0$ の場合:

…… $P(0)$ の証明 ……

- $n = S(n')$ の場合, ただし $P(n')$ とする:

…… $P(S(n'))$ の証明 ……
(…帰納法の仮定より…)

リストに関する帰納法による証明の雛形

定理: 任意のリスト l について $P(l)$

証明: l に関する帰納法による.

- $l = []$ の場合:

…… $P([])$ の証明 ……

- $l = n :: l'$ の場合, ただし $P(l')$ とする:

…… $P(n :: l')$ の証明 ……

(…帰納法の仮定より…)

もう少し複雑な例: リストの反転

```
Fixpoint rev (l:natlist) : natlist :=
  match l with
  | nil      => nil
  | h :: t => rev t ++ [h]
  end.
```

- 後ろに要素を追加するのに `append` を使っている

```
Theorem rev_length_firsttry :  
  forall l : natlist,  
    length (rev l) = length l.
```

Proof.

```
intros l. induction l as [| n l' IHl'].  
- (* l = [] *)  
  reflexivity.  
- (* l = n :: l' *)  
  simpl.
```

(* 無理っぽいゴール:

```
length (rev l' ++ n) = S (length l') *)
```

- 我々は `append` と `length` の関係に関して何も示していない!

こういう補題を立てれば…

```
Theorem app_length : forall l1 l2 : natlist,  
  length (l1 ++ l2) = (length l1)+(length l2).
```

Proof.

```
intros l1 l2.
```

```
induction l1 as [| n l1' IHl1'].
```

```
- (* l1 = nil *)
```

```
  reflexivity.
```

```
- (* l1 = cons n l1' *)
```

```
  simpl. rewrite -> IHl1'. reflexivity.
```

Qed.

さっきつまったゴールより少し一般化(?)した定理になっている

…突破できる!

```
Theorem rev_length : forall l : natlist,  
  length (rev l) = length l.
```

Proof.

```
intros l. induction l as [| n l' IHl'].
```

```
- (* l = nil *)
```

```
  reflexivity.
```

```
- (* l = cons *)
```

```
  simpl. rewrite -> app_length.
```

```
  simpl. rewrite -> IHl'. rewrite add_comm.
```

```
  reflexivity. Qed.
```

非形式証明 (ヴァージョン 1)

「雛形」に沿った冗長バージョン

補題: 任意の $l1, l2$ に対し

$length (l1 ++ l2) = length l1 + length l2$
である.

証明: $l1$ に関する帰納法. (以下 $length$ は len と略す.)

- $l1 = []$ の場合.

$$len ([] ++ l2) = len [] + len l2$$

を示す必要があるが, これは $++$, len , $+$ の定義より明らか.

- $l1 = n :: l1'$ の場合. ただし,

$$\text{len } (l1' ++ l2) = \text{len } l1' + \text{len } l2$$

とする. ここで

$$\text{len } ((n :: l1') ++ l2) = \text{len } (n :: l1') + \text{len } l2$$

を示す必要があるが, $++$, len , $+$ の定義より, これは

$$S(\text{len}(l1' ++ l2)) = S(\text{len } l1' + \text{len } l2)$$

と同値であり, これは帰納法の仮定より明らか. (証明終)

定理: 任意のリスト l に対し
 $length (rev l) = length l$

証明: l についての帰納法.

- $l = []$ とする.

$$length (rev []) = length []$$

を示す必要があるが, これは $rev, length$ の定義より明らか.

- $l = n :: l'$ ただし, $length (rev l') = length l'$ とする.

$$length (rev (n :: l')) = length (n :: l')$$

を示す必要があるが, rev , $length$ の定義より, これは

$$length ((rev l') ++ [n]) = S (length l')$$

と同値. 前の補題より, これは

$$length (rev l') + 1 = S (length l')$$

と同値で, これは $+$ の交換律, 帰納法の仮定などより明らか.

非形式証明 (ヴァージョン 2)

わかっている人向けの短縮バージョン

定理: 任意のリスト l に対し

$$\text{length}(\text{rev } l) = \text{length } l$$

まず, $\text{length}(l ++ [n]) = S(\text{length } l)$ である (これは l に関する帰納法による) ことに注意すると, この定理は l に関する帰納法で示すことができる. 特に $l = n :: l'$ の場合で, 上の性質を帰納法の仮定と組み合わせる.

どちらがいいかは状況・読み手によるが, ひとまず本当に慣れるまでは冗長なスタイルを使ってください.

便利コマンド: Search

- 前に証明した定理の名前なんて覚えていられない!
- Search foo. とかすると “foo” に関する定理を検索してくれる!
- proofgeneral なら C-c C-a C-a で検索, 検索結果は C-c C-; でペーストできる.

Search の使い方あれこれ

詳しくは教科書を見てください

- Search ($_ + _ = _ + _$).
- Search ($_ + _ = _ + _$) inside Induction.
- Search ($?x + ?y = ?y + ?x$).

Lists.v

- 自然数のペア (ふたつ組)
- 自然数リスト
- リストに関する推論
- オプション型
- 「辞書」のデータ表現

オプション型

「～かもしれない型」

```
Inductive natoption : Type :=  
  | Some (n: nat)  
  | None.
```

- Some 5
- Some 42
- None
- ∷

オプション型の使い道

リストの n 番目の要素を返す関数 `nth`

- n が大きすぎる時にどうしたらいい？

```
Fixpoint nth_bad (l:natlist) (n:nat) : nat :=
  match l with
  | nil => 42 (* arbitrary! *)
  | a :: l' => match n with
                | 0 => a
                | S n' => nth_bad l' n'
              end
  end.
```

オプション型を使うと…

- ふつうの返り値を示す `Some`
- 適当な返り値がないことを示す `None`

```
Fixpoint nth_error (l:natlist) (n:nat)
  : natoption :=
  match l with
  | nil => None
  | a :: l' => match n with
                | 0 => Some a
                | S n' => nth_error l' n'
              end
  end.
```

条件式: if-then-else

```
...  
| a :: l' => if n =? 0 then Some a  
            else nth_error l' (pred n)  
...
```

- 実は `bool` だけでなく、コンストラクタがふたつの inductive type なら何でも使える!
 - ▶ 定義での順番依存
 - ★ 一番目のコンストラクタなら `then` 節, 二番目なら `else` 節
- パターンによる値の取り出しはできない

Lists.v

- 自然数のペア (ふたつ組)
- 自然数リスト
- リストに関する推論
- オプション型
- 「部分写像」のデータ表現

部分写像

id から nat への部分写像 (dictionary, key-value pair, 連想リスト (association list) とも)

```
Inductive id : Type :=  
  | Id (n : nat).
```

```
Definition eqb_id (x1 x2 : id) :=  
  match x1, x2 with  
  | Id n1, Id n2 => n1 =? n2  
  end.
```

id 型: 内部実装は自然数だが, 足し算などはできず, 等しさの比較だけができる

部分写像のデータ型

```
Inductive partial_map : Type :=  
  | empty  
  | record (i : id) (v : nat) (m : partial_map)
```

- empty: 空の写像
- record: 既存の写像 m に $i \mapsto v$ を追加

写像の更新

$d[x \mapsto v]$... x を v に写し, x 以外は d に従って写すような写像

```
Definition update (d : partial_map)
                  (x : id) (value : nat)
                  : partial_map :=
  record x value d.
```

- update: 写像の更新 = 先頭への追加
 - ▶ 同じ id が二度以上現れたらどうするの？

線形探索 find

```
Fixpoint find (x : id) (d : partial_map)
  : natoption :=
match d with
| empty          => None
| record y v d' => if eqb_id x y
                    then Some v
                    else find x d'
end.
```

- 前からみていって初めて x を見つけたところの v を返すので、二度以上 x が部分写像の中にあっても問題ない

宿題： 11/ 午前10:30 締切

- Exercise: `snd_fst_is_swap` (1), `list_funs` (2), `list_exercises` (3), `eqblist` (2), `hd_error` (2) (その他は随意課題)