

「計算と論理」

Software Foundations

その5

五十嵐 淳

`cal15@fos.kuis.kyoto-u.ac.jp`

`http://www.fos.kuis.kyoto-u.ac.jp/~igarashi/class/cal/`

京都大学

November 27, 2015

Basic Tactics.v: 目次

Coq のタクティックについてさらに学ぼう

- `apply` タクティック
- `apply ... with ...` タクティック
- `inversion` タクティック
- タクティックを仮定に対して使う
- 帰納法の仮定を変える
- 複合的な式に関する `destruct` の使用

apply タクティク

使用法その1: 仮定からゴールが直接結論づけられる時に使う

```
Theorem silly1 : forall (n m o p : nat),  
  n = m ->  
  [n,o] = [n,p] ->  
  [n,o] = [m,p].
```

Proof.

```
  intros n m o p eq1 eq2.  
  rewrite <- eq1.  
  (* ゴールは仮定 eq1 と同じ [n,o] = [n,p] *)  
  (* rewrite -> eq2. reflexivity. の代わりに *)  
  apply eq2.
```

Qed.

apply タクティック

使用法その2: ゴールを導くための前提条件に遡る

```
Theorem silly2 : forall (n m o p : nat),  
  n = m ->  
  (forall (q r : nat), q = r -> [q,o] = [r,p])  
  [n,o] = [m,p].
```

Proof.

```
intros n m o p eq1 eq2.  
apply eq2. apply eq1.
```

Qed.

- 全称量化された仮定 eq2 が $q := n, r := m$ と具体化されて使われている
- 具体化された前提条件 $n = m$ が新たなゴールとなる

apply の使い方

より一般に,

- $Q(k)$ を示す必要がある
- 「任意の x について $P(x)$ ならば $Q(x)$ 」が成立することは (定理として) 既にわかっている (か, 仮定されている)
- (具体化すると $P(k)$ ならば $Q(k)$ なので), $P(k)$ を示すことにする

という推論過程に使える.

\implies 十分条件に遡っている!

apply H の挙動

仮定

$$\begin{aligned} \mathbf{H} : \forall \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m, \\ \mathbf{P}_1(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m) \rightarrow \\ \dots \\ \mathbf{P}_n(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m) \rightarrow \mathbf{Q}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m) \end{aligned}$$

ゴール

$$\mathbf{Q}(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_m)$$

↓ apply H

新ゴール

$$\mathbf{P}_1(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_m)$$

(n 個)

⋮

$$\mathbf{P}_n(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_m)$$

ゴールと apply の引数の結論のマッチング

```
Theorem silly3_firsttry : forall (n : nat),  
  true = beq_nat n 5 ->  
  beq_nat (S (S n)) 7 = true.
```

Proof.

```
  intros n H.
```

```
  simpl.
```

```
  (* Here we cannot use [apply] directly *)
```

Abort.

symmetry タクティク

等式の左右をひっくり返す

```
Theorem silly3 : forall (n : nat),  
  true = beq_nat n 5  ->  
  beq_nat (S (S n)) 7 = true.
```

Proof.

```
  intros n H.
```

```
  symmetry.
```

```
  simpl. (* 実は不要: apply は単純化を先に行う! *)
```

```
  apply H.
```

Qed.

Basic Tactics.v

- `apply` タクティック
- `apply ... with ...` タクティック
- `inversion` タクティック
- タクティックを仮定に対して使う
- 帰納法の仮定を変える
- 複合的な式に関する `destruct` の使用

apply with タクティック

動機付け: 等号の推移律

Theorem trans_eq : forall X:Type (n m o : X),
n = m -> m = o -> n = o.

をより具体的な例についての証明で使うことを考える.

Example trans_eq_example' :
forall (a b c d e f : nat),
[a,b] = [c,d] ->
[c,d] = [e,f] ->
[a,b] = [e,f].

Proof.

```
intros a b c d e f eq1 eq2.
```

```
apply trans_eq. (* エラー! *)
```

何が起こったのか？

- ゴール: $[a, b] = [e, f]$
- `trans_eq` :
forall X (n m o : X), n = m -> m = o -> n = o



- Coq がまわりの状況から勝手にわかってくれること:
 - ▶ `X := list nat`
 - ▶ `n := [a, b]`
 - ▶ `o := [e, f]`
- `m` をどうすべきかは (ゴールを見ても) わからない!

Coq にヒントを与える with

```
Example trans_eq_example' :  
  forall (a b c d e f : nat),  
    [a,b] = [c,d] ->  
    [c,d] = [e,f] ->  
    [a,b] = [e,f].
```

Proof.

```
  intros a b c d e f eq1 eq2.  
  apply trans_eq with (m:=[c,d]).  
  apply eq1. apply eq2.
```

Qed.

定理に出てくる変数の名前を知らないと使えません

今日のメインメニュー

BasicTactics.v

- apply タクティック
- apply ... with ... タクティック
- **inversion** タクティック
- タクティックを仮定に対して使う
- 帰納法の仮定を変える
- 複合的な式に関する destruct の使用

自然数について再び

自然数の性質:

場合分けの原理 (数学的帰納法の特殊ケース)

$n : \text{nat}$ ならば $n = 0$ または $n = S n'$ なる n' が存在

コンストラクタは「1対1関数」(injective)

任意の n, m について $S n = S m$ ならば $n = m$.

(対偶を取ると)

任意の n, m について $n \neq m$ ならば $S n \neq S m$.

異なるコンストラクタは等しくない

任意の n について $0 \neq S n$ (等しいとしたら, それは矛盾)

他の帰納的定義でも同じこと

- コンストラクタの injectivity
 - ▶ 等式の左右に現れる同一コンストラクタをはがしても「等しさ」は保たれる
- 異なるコンストラクタから作られるデータは決して等しくならない

が いえる

⇒ これらを活用するのが inversion タクティク

- これまでのタクティクと違い，主に仮定に作用するところに注目!

inversion タクティク (1)

⋮

$$H : c a_1 \cdots a_n = d b_1 \cdots b_m$$

⋮

P

↓ inversion H. (**c, d** が同じ場合)

⋮

$$H_1 : a_1 = b_1$$

⋮

$$H_n : a_n = b_n$$

⋮

P' (**P** に対して H_1, \dots, H_n を使い書き換えた結果)

inversion の練習 (1)

Theorem eq_add_S : forall (n m : nat),
S n = S m -> n = m.

Theorem silly4 : forall (n m : nat),
[n] = [m] -> n = m.

Theorem silly5 : forall (n m o : nat),
[n,m] = [o,o] -> [n] = [m].

(* コンストラクタが入れ子状になっていても
まとめて分解してくれる *)

inversion (2)

⋮

$$\mathbf{H} : \mathbf{c} \mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_n = \mathbf{d} \mathbf{b}_1 \cdots \mathbf{b}_m$$

⋮

P

↓ inversion H. (**c, d** が違う場合)

仮定が矛盾しているので、このゴールは解消

inversion の練習 (2)

前提が矛盾しているので何でもいえる!

Theorem silly6 : forall (n : nat),
S n = 0 -> 2 + 2 = 5.

Theorem silly7 : forall (n m : nat),
false = true -> [n] = [m].

寄り道: injectivity の逆

Theorem `f_equal` :

```
forall (A B : Type) (f: A -> B) (x y: A),  
  x = y -> f x = f y.
```

- ゴールが等式で両辺が「ちょっとだけ違う」時に使
うと、違う部分がゴールになって便利
- (特に `inversion` タクティックとは関係ないが今後よ
く使う)

Basic Tactics.v

- apply タクティック
- apply ... with ... タクティック
- inversion タクティック
- タクティックを仮定に対して使う
- 帰納法の仮定を変える
- 複合的な式に関する destruct の使用

タクティックを仮定に対して使う

- `simpl in H`: 仮定 **H** の内容を単純化
- `symmetry in H`: 仮定 **H** : $a = b$ を **H** : $b = a$ にする
- `apply L in H`: 仮定 **H** に別の仮定 **L** を適用
 - ▶ **H** : $P(n)$ と **L** : $\forall x, P(x) \rightarrow Q(x)$ から
 - ▶ **H** : $Q(n)$ を導く

推論の「方向」に注意!

前向き推論と後向き推論

前向き推論 (forward reasoning)

既知の事実や現在置いた仮定を組み合わせ、新しい判断を得る推論

後向き推論 (backward reasoning)

示したい判断(ゴール)から、それを与える十分条件に遡る推論

- 演繹的・帰納的推論の区別とは直交なので注意
- Coq での推論は (帰納法の適用も含めて) 全て演繹的 (妥当というべき?)
- `apply` は後向き, `apply in H` は前向き

例

```
Theorem S_inj : forall (n m : nat) (b : bool),  
  beq_nat (S n) (S m) = b ->  
  beq_nat n m = b.
```

Proof.

```
intros n m b H. simpl in H. apply H. Qed.
```


例

```
Theorem silly3' : forall (n : nat),  
  (beq_nat n 5 = true ->  
   beq_nat (S (S n)) 7 = true) ->  
  true = beq_nat n 5 ->  
  true = beq_nat (S (S n)) 7.
```

Proof.

```
intros n eq H.  
symmetry in H. apply eq in H. symmetry in H.  
apply H. Qed.
```

Basic Tactics.v

- apply タクティック
- apply ... with ... タクティック
- inversion タクティック
- タクティックを仮定に対して使う
- 帰納法の仮定を変える
- 複合的な式に関する destruct の使用

Coq での帰納法による証明の落とし穴

- Coq ではデータ型定義から自然に定まる帰納法以外の帰納法が使いづらい
 - ▶ Q: 「Coq では累積帰納法は使えないの？」
 - ▶ A: 「使えるけど使いにくい・工夫が必要です」
- ので、ついつい、ふつうの帰納法を使ってしまう

累積帰納法

「任意の x について $P(x)$ 」と以下は同値:

- 任意の x について $P(0)$ かつ $\dots P(x - 1)$ ならば $P(x)$

Coq での帰納法による証明の落とし穴

- しかし、帰納法で証明したい「任意の x について $P(x)$ 」の P の選ばれ方 (これは Coq が選ぶ) によっては証明がうまくいかったりいかなかったりする
 - ▶ Coq による P の選び方を知る必要がある

例題

定理: 「任意の自然数 n, m について
 $\mathbf{double(n) = double(m)}$ ならば $\mathbf{n = m}$ 」

証明: 帰納法による.

- $n = 0, m = 0$ の場合: 自明に
「 $\mathbf{double(n) = double(m)}$ ならば $\mathbf{n = m}$ 」
- $n = 0, m = S(m')$ の場合: そもそも
 $\mathbf{double(n) \neq double(m)}$
- $n = S(n'), m = 0$ の場合: そもそも
 $\mathbf{double(n) \neq double(m)}$
- $n = S(n'), m = S(m')$ の場合: (次のスライド)

例題

- $n = S(n'), m = S(m')$ の場合:
 - ① $\text{double}(S(n')) = \text{double}(S(m'))$ を仮定する.
 - ② この時, double の定義より,
 $S(S(\text{double}(n'))) = S(S(\text{double}(m')))$ である.
 - ③ さらに, S の injectivity より
 $\text{double}(n') = \text{double}(m')$ である
 - ④ 帰納法の仮定より $n' = m'$ である
 - ⑤ これより $S(n') = S(m')$ すなわち, $n = m$ がいえた

これ，どんな帰納法？

実は自然数のペアについての帰納法！

- $P(0, 0)$
- $x > 0$ ならば $P(x, 0)$
- $y > 0$ ならば $P(0, y)$
- $P(x, y)$ ならば $P(x + 1, y + 1)$

から，「任意の自然数 x, y について $P(x, y)$ 」を示した

Coq でやってみる

```
Theorem double_injective_FAILED : forall n m,  
  double n = double m ->  
  n = m.
```

Proof.

```
intros n m. induction n as [| n'].
```

- ここでの $P(n)$ は
 $\text{double } n = \text{double } m \rightarrow n = m.$
- 示すべきことは
 - ▶ $P(0)$ と $P(n') \rightarrow P(S(n'))$
 - ▶ m が固定されている!

なんかおかしい気もするが、突撃!

P(0) を示す

- (* n = 0 *)

 simpl. intros eq. destruct m as [| m'].

 + (* m = 0 *) reflexivity.

 + (* m = S m' *) inversion eq.

- m について場合分け. $m = S(m')$ の場合, 示せそうもないゴールになるが, 同時に仮定も矛盾するので *inversion* で OK
- *simpl* は見通しをよくするため (特に必要ではない)

さらに進撃!

$\forall n', P(n') \rightarrow P(S(n'))$ を示す.

- $(* n = S n' *)$
intros eq. destruct m as [| m'].
 - + $(* m = 0 *)$ inversion eq.
 - + $(* m = S m' *)$ apply f_equal.

- ※でのゴールは $\forall n', P(n') \rightarrow P(S(n'))$ そのものではなく、 n' , 帰納法の仮定である $P(n')$ と $P(S(n'))$ の仮定部分 $\text{double } n' = \text{double } m \rightarrow n' = m$ が文脈に移っている
- m について場合わけ. $m = 0$ の場合は一撃だが...

あれ？

1 subgoals, subgoal 1 (ID 580)

```
SCase := "m = S m'" : String.string
```

```
Case := "n = S n'" : String.string
```

```
n' : nat
```

```
m' : nat
```

```
IHn' : double n' = double (S m') -> n' = S m'
```

```
eq : double (S n') = double (S m')
```

```
=====
```

```
n' = m'
```

- **IHn'** の結論が $n' = m'$ じゃないぞ!?

何がまずかったのか

- 失敗した証明の最初で Coq に (暗黙に) 伝えたこと:
 - ▶ 「 n, m を何らかの自然数としよう. その n, m について **$\text{double } n = \text{double } m$** ならば **$n = m$** であることを n についての帰納法で示そうと思う」
- その結果のゴール:
 - ▶ **$\text{double } 0 = \text{double } m$** ならば **$0 = m$** であること
 - ▶ 「 **$\text{double } k = \text{double } m$** ならば **$k = m$** 」が
「 **$\text{double } (S k) = \text{double } m$** ならば **$S k = m$** 」を
含意すること
 - ★ つまり「 $P(n, m)$ ならば, $P(n + 1, m)$ 」, これは示せそうもない.

ちょっと不自然だけどうまくいく証明

- $P(0, 0)$
- $x > 0$ ならば $P(x, 0)$
- $y > 0$ ならば $P(0, y)$
- $P(x, y)$ ならば $P(x + 1, y + 1)$

の代わりに

- 任意の y について $P(0, y)$
- 「任意の y について $P(x, y)$ 」ならば「任意の y について $P(x + 1, y)$ 」

を示す (これはふつうの数学的帰納法)

日本語による証明

帰納法の **P** が何かを明示しよう!

定理: 任意の自然数 n, m について

$\text{double } n = \text{double } m$ ならば $n = m$ である

証明: n についての帰納法で「任意の m について **$\text{double } n = \text{double } m$ ならば $n = m$ である**」を示す.

- $n = 0$ の場合: 「任意の m について **$\text{double } 0 = \text{double } m$ ならば $0 = m$ である**」を示す. m について場合わけ.
 - ▶ $m = 0$ の場合は自明
 - ▶ $m = S(m')$ の場合は, 前提 **$\text{double } 0 = \text{double } m$ が不成立**

- $n = S n'$ の場合, ただし, 任意の m について $\text{double } n' = \text{double } m$ ならば $n' = m$ である, とする (帰納法の仮定).

この時「任意の m について

$\text{double } (S n') = \text{double } m$ ならば $(S n') = m$ である」を m についての場合分けで示す.

- ▶ $m = 0$ の場合: 前提が不成立
- ▶ $m = S m'$ の場合:
 - ★ $\text{double}(S n') = \text{double}(S m')$ とする
 - ★ 両辺を計算, injectivity を使うと $\text{double}(n') = \text{double}(m')$
 - ★ 帰納法の仮定より m として m' をとると, $n' = m'$

Coq での証明

```
Theorem double_injective : forall n m,  
  double n = double m ->  
  n = m.
```

Proof.

```
intros n. induction n as [| n'].
```

- **m** を intros しないで induction をする.
- ここでの **P(n)** は
 forall m, double n = double m -> n = m.
 「その二倍が **n** の二倍と等しいような任意の **m** について、**n** と **m** は等しい」


```
- (* n = 0 *)
  simpl. intros m eq. destruct m as [| m'].
+ (* m = 0 *) reflexivity.
+ (* m = S m' *) inversion eq.
```

- m についての場合分けの前に `intros m` が必要

```

- (* n = S n' *) (* ※1 *)
  intros m eq. (* ここで m を「固定」する *)
  destruct m as [| m'].
+ (* m = 0 *) inversion eq.
+ (* m = S m' *)
  apply f_equal. (* ※2 *)
  apply IHn'. (* simpl in eq. *)
  inversion eq. reflexivity. Qed.

```

- (※1) 失敗した時よりも一般的なこと ($\forall m$ つき) を示すことを求められている
- が、帰納法の仮定 IHn' にも $\forall m$ がついている!

(※2) の文脈とゴールは…

1 subgoals, subgoal 1 (ID 663)

$n' : \text{nat}$

$\text{IH}n' : \text{forall } m : \text{nat},$

$\text{double } n' = \text{double } m \rightarrow n' = m$

$m' : \text{nat}$

$\text{eq} : \text{double } (S n') = \text{double } (S m')$

=====

$n' = m'$

- 帰納法の仮定の「任意の m 」を m' で具体化してやればよい。

教訓

- Coq のせいで不自然な帰納法を使わされることがある
- n と m についての性質を n についての帰納法で証明する時, m は量化されたまま残しておくとき吉な場合がある
- 「いつ残すべきか」についての確実な処方箋は「よく考えること」
 - ▶ $P(n, m)$ ならば $P(S(n), m)$ はいえ (そうも) ないが, $P(n, m)$ ならば $P(S(n), S(m))$ はいえるような時は要注意

量化の順番と再量化

さきほどの定理を m に関する帰納法で証明しようとすると同じく失敗する.

```
Theorem double_injective : forall n m,  
  double n = double m ->  
  n = m.
```

Proof.

```
intros n m. induction m as [| n'].  
(* intro なしで induction m しても同じ! *)
```

...

generalize dependent タクティック

文脈で仮定した変数を再び全称量化するタクティック

```
Theorem double_injective_take2 : forall n m,  
  double n = double m -> n = m.
```

Proof.

```
  intros n m.
```

```
  generalize dependent n.
```

(* ゴールが望む forall n, ... の形になる *)

```
  induction m as [| m'].
```

```
  ...
```

inversion と帰納法の練習

Lists.v で証明した定理の変形版

Theorem length_snoc' :

```
forall (X : Type)
```

```
  (v : X) (l : list X) (n : nat),
```

```
  length l = n -> length (snoc l v) = S n.
```

Proof.

```
intros X v l. induction l as [| v' l'].
```

```
(* n eq を文脈に入れちゃだめ！ *)
```

```
- (* l = [] *) (* 省略 *)
```

```

- (* l = v' :: l' *)
  intros n eq. simpl. destruct n as [| n'].
+ (* n = 0 *)
  inversion eq.
+ (* n = S n' *)
  apply eq_remove_S. apply IHl'.
(* 仮定 eq の左辺は S (length l') に等しい *)
  inversion eq. reflexivity.

```

Qed.

Basic Tactics.v

- apply タクティック
- apply ... with ... タクティック
- inversion タクティック
- タクティックを仮定に対して使う
- 帰納法の仮定を変える
- 複合的な式に関する destruct の使用

複合的な式に関する場合分け

- `destruct` の引数は文脈にある変数でなくてもよい
 - ▶ (実は他のタクティックも変数以外の引数が取れる)
- 式一般についての場合分けが可能

```
Definition sillyfun (n : nat) : bool :=  
  if beq_nat n 3 then false  
  else if beq_nat n 5 then false  
  else false.
```

```
Theorem sillyfun_false : forall (n : nat),  
  sillyfun n = false.
```

- `beq_nat` の結果 (n が 3 かどうか, 5 かどうか) についての場合分け
 - ▶ n が 5 以下の場合を個別に, $n \geq 6$ の場合を帰納法で証明, という手もあるかもしれないが...

Proof.

```
intros n. unfold sillyfun.
```

```
destruct (beq_nat n 3).
```

```
- (* beq_nat n 3 = true *) reflexivity.
```

```
- (* beq_nat n 3 = false *)
```

```
destruct (beq_nat n 5).
```

```
+ (* beq_nat n 5 = true *) reflexivity.
```

```
+ (* beq_nat n 5 = false *) reflexivity.
```

Qed.

別の例

```
Definition sillyfun1 (n : nat) : bool :=  
  if beq_nat n 3 then true  
  else if beq_nat n 5 then true  
  else false.
```

```
Theorem sillyfun1_odd : forall (n : nat),  
  sillyfun1 n = true ->  
  oddb n = true.
```

- `sillyfun1` が真を返すための必要条件は「引数が奇数」

Proof.

```
intros n eq. unfold sillyfun1 in eq.
```

```
(* eq : (if beq_nat n 3 then ...) = true
```

```
=====
```

```
oddb n = true *)
```

```
destruct (beq_nat n 3).
```

```
- (* beq_nat n 3 = true *)
```

```
(* eq : true = true ←左辺の単純化の結果
```

```
=====
```

```
oddb n = true *)
```

- $\text{beq_nat } n \ 3 = \text{true}$ の場合と,
 $\text{beq_nat } n \ 3 = \text{false}$ の場合で分けたつもりなのに,
肝心の $\text{beq_nat } n \ 3 = \text{true}$ が消えている!!

destruct eqn: タクティック

場合分けの対象の式についての情報を文脈に追加

Proof.

```
intros n eq. unfold sillyfun1 in eq.
```

```
(* eq : (if beq_nat n 3 then ...) = true
```

```
=====
```

```
oddb n = true *)
```

```
destruct (beq_nat n 3) eqn:Heqe3.
```

```
(* Heqe3 : beq_nat n 3 = true
```

```
eq : true = true (* 左辺は計算済 *)
```

```
=====
```

```
oddb n = true *)
```

あとは, Heqe3 から $n = 3$ がわかる.

- (* e3 =true *)

apply beq_nat_eq in Heqe3.

(* Heqe3 : $n = 3$ になる *)

rewrite -> Heqe3. (* $n = 3$ を代入 *)

reflexivity.

- **e3 = false** の場合は, さらに

destruct beq_nat n 5 eqn:Heqe5.

で場合分け

宿題： / 午前10:30 締切

- Exercise: `apply_exercise1` (3), `sillyex1` (1), `sillyex2` (2), `plus_n_n_injective` (3), `beq_nat_true` (2), `destruct_eqn_practice` (2)
- 解答を書き込んだ `BasicTactics.v` までのファイル全てをオンライン提出システムを通じて提出
- 以下をコメント欄に明記:
 - ▶ 講義・演習に関する質問，わかりにくいと感じたこと，その他気になること。（「特になし」はダメです。）
 - ▶ 友達に教えてもらったなら、その人の名前，他の資料（web など）を参考にした場合，その情報源（URL など）。