工学部専門科目「計算と論理」配布資料
練習問題集 (2014 年度版)

五十嵐 淳
京都大学 大学院情報学研究科 通信情報システム専攻
cal14@fos.kuis.kyoto-u.ac.jp
igarashi@kuis.kyoto-u.ac.jp

January 6, 2015

演習の進め方

0. 予め練習問題を解いておく
1. 練習問題の解答を (問題番号・氏名とともに) 白板に書く
2. 教員/TA による講評
3. 1., 2. を繰り返す.

注意事項

- 小問単位で答えよ.
- 問題を解答する順番は問わない. (後の問題を最初に解いてよい.)
- 問題の解答は早い者勝ちとするが, 同時に解答を開始するのは構わない.
- 正答した場合は成績へ加える.

期末試験について

- Coq のプログラム (型・命題定義, 関数定義) は書ける必要あり
- Coq のタクティックを使った証明は書けなくてよい
- (日本語の) 非形式的証明は書ける必要あり
- 導出は書ける必要あり
- 「公式カンニングペーパー」1 枚 (講義最終回に配布予定) の持ち込みを認める.

1　単純型付ラムダ計算

定義 1.1 (正規形) 項 $\boldsymbol{M}$ がこれ以上簡約できない，すなわち，$\boldsymbol{M} \longrightarrow \boldsymbol{N}$ なる項 $\boldsymbol{N}$ が存在しない時，項 $\boldsymbol{M}$ は正規形 *(normal form)* である，という．

定義 1.2 (正規化可能) 項 $\boldsymbol{M}$ が正規形に簡約できる，すなわち，$\boldsymbol{M} \longrightarrow^* \boldsymbol{N}$ *(ただし* $\boldsymbol{N}$ *は正規形)* であるような $\boldsymbol{N}$ が存在する時，項 $\boldsymbol{M}$ は正規化可能 *(normalizable)* である，または，$\boldsymbol{M}$ は正規形を持つ，という．

練習問題 1.1 項

$$\boldsymbol{M} = \texttt{if true then (fun n : nat => plus n n) (S 0) else (fun n : nat => n) 0}$$

とする．$\boldsymbol{M}$ は以下の 3 つの項

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{M_1} &= \texttt{(fun n : nat => plus n n) (S 0)} \\
\boldsymbol{M_2} &= \texttt{if true then plus (S 0) (S 0) else (fun n : nat => n) 0} \\
\boldsymbol{M_3} &= \texttt{if true then (fun n : nat => plus n n) (S 0) else 0}
\end{aligned}$$

に簡約されうる．以下の小問 i (ただし $i = 1, 2, 3$) に答えよ．

　小問 i: $\boldsymbol{M} \longrightarrow \boldsymbol{M_i}$ の導出木を書け．

練習問題 1.2 $\boldsymbol{M}$ を `fix f (x : nat) : nat := match x with 0 => 0 | S y => S (S (f y)) end` とする．

$$\boldsymbol{M}\ \texttt{(S (S 0))} \longrightarrow \boldsymbol{M_1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \boldsymbol{M_n}$$

(ただし $\boldsymbol{M_n}$ は `S (S (...0)...)` の形) となる $\boldsymbol{M_i}$ を列挙せよ．

練習問題 1.3 `Basics.v` に登場した `plus` 関数を `fix` を使った項 $\boldsymbol{M}_{plus}$ で表すと以下のようになる．

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{M}_{plus} &= \texttt{fix plus(m : nat) : nat := fun (n : nat) =>} \\
&\qquad \texttt{match m with 0 => n | S m' => S (plus m' n) end}
\end{aligned}$$

($\boldsymbol{M}_{plus}$ `(S 0)`) `(S 0)` が簡約されて `S (S 0)` になる過程を，$\boldsymbol{M}_{plus}$ `(S 0) (S 0)` $\longrightarrow \boldsymbol{M_1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \boldsymbol{M_n} \longrightarrow$ `S (S 0)` なる $\boldsymbol{M_i}$ を列挙することで示せ．

練習問題 1.4 前問の $\boldsymbol{M}_{plus}$ は正規化可能ではないことを説明せよ．

練習問題 1.5 練習問題 1.1 の項 $\boldsymbol{M}$ をこれ以上簡約できなくなるまで簡約した結果得られる項を $\boldsymbol{N}$ とするとき，$\boldsymbol{M} \longrightarrow^* \boldsymbol{N}$ の導出木を書け．

練習問題 1.6 関係 `(fun x : nat => x) (S 0)` $\longleftrightarrow$ `(fun x : nat => S 0) 0` の導出木を書け．

練習問題 1.7 項

`(fun c : nat -> bool -> nat => fun a : nat => (c a)) (fun b : nat => fun a : bool => b)`

の正規形を求めよ．

練習問題 1.8 以下の小問に答えよ．

1. 練習問題 1.1 の項 $\boldsymbol{M}$ について，型付け関係 $\vdash \boldsymbol{M} : \boldsymbol{T}$ が成立する $\boldsymbol{T}$ を見つけ，型付け関係の導出木を書け．

i. (ただし $i = 2, 3, 4$) 練習問題 1.1 の項 $\boldsymbol{M_{i-1}}$ について，型付け関係 $\vdash \boldsymbol{M_{i-1}} : \boldsymbol{T_{i-1}}$ が成立する $\boldsymbol{T_{i-1}}$ を見つけ，型付け関係の導出木を書け．

練習問題 1.9 練習問題 1.1 の項 $\boldsymbol{M}, \boldsymbol{M_i}$ (ただし $\boldsymbol{i} = 1,\ 2,\ 3$) の型付け関係の導出木をそれぞれ書け．

練習問題 1.10 練習問題 1.1 の項 $\boldsymbol{M}$ をこれ以上簡約できなくなるまで簡約した結果得られる項を $\boldsymbol{N}$ とするとき，$\boldsymbol{M} \longrightarrow^* \boldsymbol{N}$ の導出木を書け．

練習問題 1.11 練習問題 1.5 の項 $\boldsymbol{N}$ の型付け関係の導出木を書け．

練習問題 1.12 `plus (S O) (S (S O))` $\longleftrightarrow^*$ `plus (S (S O)) (S O)` の導出木を書け．

2 単純型付ラムダ計算＋ペア

ペアで拡張した単純型付ラムダ計算を考える．

$$
\begin{array}{llll}
\text{(types)} & \boldsymbol{S}, \boldsymbol{T} & ::= & \cdots \mid \boldsymbol{S} \times \boldsymbol{T} \\
\\
\text{(terms)} & \boldsymbol{M}, \boldsymbol{N} & ::= & \cdots \mid \texttt{(}\boldsymbol{M_1}\texttt{,}\boldsymbol{M_2}\texttt{)} \\
& & \mid & \texttt{match}\ \boldsymbol{M}\ \texttt{with}\ \texttt{(}\boldsymbol{x}\texttt{,}\ \boldsymbol{y}\texttt{)}\ \texttt{=>}\ \boldsymbol{N}\ \texttt{end}
\end{array}
$$

$$
\texttt{match}\ \texttt{(}\boldsymbol{M_1}\texttt{,}\boldsymbol{M_2}\texttt{)}\ \texttt{with}\ \texttt{(}\boldsymbol{x}\texttt{,}\ \boldsymbol{y}\texttt{)}\ \texttt{=>}\ \boldsymbol{N}[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}]\ \texttt{end} \longrightarrow \boldsymbol{N}[\boldsymbol{M_1}, \boldsymbol{M_2}] \qquad \text{(R-PMatch)}
$$

$$
\frac{\boldsymbol{\Gamma} \vdash \boldsymbol{M} : \boldsymbol{S} \qquad \boldsymbol{\Gamma} \vdash \boldsymbol{N} : \boldsymbol{T}}{\boldsymbol{\Gamma} \vdash \texttt{(}\boldsymbol{M}\texttt{,}\ \boldsymbol{N}\texttt{)} : \boldsymbol{S} \times \boldsymbol{T}} \qquad \text{(T-Pair)}
$$

$$
\frac{\boldsymbol{\Gamma} \vdash \boldsymbol{M} : \boldsymbol{T_1} \times \boldsymbol{T_2} \qquad \boldsymbol{\Gamma},\ \boldsymbol{x} : \boldsymbol{T_1},\ \boldsymbol{y} : \boldsymbol{T_2} \vdash \boldsymbol{N} : \boldsymbol{S}}{\boldsymbol{\Gamma} \vdash \texttt{match}\ \boldsymbol{M}\ \texttt{with}\ \texttt{(}\boldsymbol{x}\texttt{,}\ \boldsymbol{y}\texttt{)}\ \texttt{=>}\ \boldsymbol{N}\ \texttt{end} : \boldsymbol{S}} \qquad \text{(T-PMatch)}
$$

練習問題 2.1 `Lists.v` で定義した `fst` に相当する項 Fst を書き，

1. 関係 Fst `(O, S O)` $\longrightarrow^*$ `O` の導出木を書け．

2. 型付け関係 $\vdash \mathit{Fst} :$ `nat` $\times$ `nat` `->` $\boldsymbol{T}$ が成立する $\boldsymbol{T}$ を見つけ，導出を書け．

練習問題 2.2 以下の単純型付ラムダ計算の型付け関係の判断について，判断が導出できるような項 $\boldsymbol{M}$ を見つけ，導出を書け．ただし，$\boldsymbol{S}, \boldsymbol{T}, \boldsymbol{U}$ は型とする．

1. $\vdash \boldsymbol{M} : \boldsymbol{S} \texttt{->} \boldsymbol{T} \texttt{->} \boldsymbol{S}$
2. $\vdash \boldsymbol{M} : (\boldsymbol{S} \texttt{->} \boldsymbol{T} \texttt{->} \boldsymbol{U}) \texttt{->} (\boldsymbol{S} \texttt{->} \boldsymbol{T}) \texttt{->} \boldsymbol{S} \texttt{->} \boldsymbol{U}$
3. $\vdash \boldsymbol{M} : (\boldsymbol{S} \texttt{->} \boldsymbol{T} \texttt{->} \boldsymbol{U}) \texttt{->} (\boldsymbol{S} * \boldsymbol{T} \texttt{->} \boldsymbol{U})$
4. $\vdash \boldsymbol{M} : (\boldsymbol{S} * \boldsymbol{T} \texttt{->} \boldsymbol{U}) \texttt{->} (\boldsymbol{S} \texttt{->} \boldsymbol{T} \texttt{->} \boldsymbol{U})$

3 多相ラムダ計算

$\boldsymbol{id}$ を項 `fun X : Type => fun x : X => x` とする．

練習問題 3.1

$$\boldsymbol{id}\ (\texttt{nat -> nat})\ \texttt{S}\ (\boldsymbol{id}\ \texttt{nat 0}) \longrightarrow \boldsymbol{M_1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \boldsymbol{M_n}$$

(ただし $\boldsymbol{M_n}$ は `S (S (...0)...)` の形) となる $\boldsymbol{M_i}$ を列挙せよ．

練習問題 3.2 以下の多相ラムダ計算の型付け関係の判断について，判断が導出できるような型 $\boldsymbol{T}$ を見つけ，導出を書け．

1. $\vdash \texttt{fun}\ X : \texttt{Type => fun}\ x : X\ \texttt{=> fun}\ y : X\ \texttt{=>}\ x : \boldsymbol{T}$
2. $\vdash \boldsymbol{id}\ (\forall \texttt{Y : Type, Y -> Y})\ \boldsymbol{id} : \boldsymbol{T}$

練習問題 3.3 項 $\boldsymbol{I}$，$\boldsymbol{K}$，$\boldsymbol{S}$ をそれぞれ以下のように定義する．

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{I} &= \texttt{fun X : Type => fun x : X => x} \\
\boldsymbol{K} &= \texttt{fun X : Type => fun Y : Type => fun x : X => fun y : Y => x} \\
\boldsymbol{S} &= \texttt{fun X : Type => fun Y : Type => fun Z : Type =>} \\
&\qquad \texttt{fun x : X -> Y -> Z => fun y : X -> Y => fun z : X => x z (y z)}
\end{aligned}$$

このとき，以下の型付け関係の判断について，判断が導出できるような型 $\boldsymbol{T_1}, \boldsymbol{T_2}, \boldsymbol{T_3}$ を見つけ，導出を書け．

1. $\vdash \boldsymbol{I} : \boldsymbol{T_1}$
2. $\vdash \boldsymbol{K} : \boldsymbol{T_2}$

3. $\vdash \boldsymbol{S} : \boldsymbol{T_3}$

練習問題 3.4 以下の型付け関係の判断について，判断が導出できるような型 $\boldsymbol{T}$ および，$\boldsymbol{T_1}, \boldsymbol{T_2}$ を見つけ，導出を書け．ただし，練習問題 3.3 で求めた導出と重複する部分は省略して良い．

$\vdash \texttt{fun}\ X : \texttt{Type} \texttt{ => }\ \boldsymbol{S}\ \boldsymbol{T_1}\ \boldsymbol{T_2}\ \boldsymbol{T_1}\ (\boldsymbol{K}\ \boldsymbol{T_1}\ \boldsymbol{T_2})\ (\boldsymbol{K}\ \boldsymbol{T_1}\ \boldsymbol{T_1}) : \boldsymbol{T}$

練習問題 3.5 多相ラムダ計算を使うと，ペアを次のように定義することが出来る．

$$\begin{aligned}\boldsymbol{pair} \;&=\; \texttt{fun X : Type => fun Y : Type => fun x : X => fun y : Y =>} \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad \texttt{fun Z : Type => fun Z : X -> Y -> Z => z x y}\end{aligned}$$

また，このように定義したペアについての $\boldsymbol{fst}$ と $\boldsymbol{snd}$ は次のように定義される．

$$\begin{aligned}\boldsymbol{fst} \;&=\; \texttt{fun X : Type => fun Y : Type => fun p : }\forall\texttt{Z : Type,(X -> Y -> Z) -> Z =>} \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad \texttt{p X (fun x : X => fun y : Y => x)} \\ \boldsymbol{snd} \;&=\; \texttt{fun X : Type => fun Y : Type => fun p : }\forall\texttt{Z : Type,(X -> Y -> Z) -> Z =>} \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad \texttt{p Y (fun x : X => fun y : Y => y)}\end{aligned}$$

以下の型付け関係の判断について，判断が導出できるような型 $\boldsymbol{S}, \boldsymbol{T}, \boldsymbol{U}$ を見つけ，導出を書け．

1. $\vdash \boldsymbol{pair} : \boldsymbol{S}$
2. $\vdash \boldsymbol{fst} : \boldsymbol{T}$
3. $\vdash \boldsymbol{snd} : \boldsymbol{U}$

練習問題 3.6 $\boldsymbol{pair}$, $\boldsymbol{fst}$, $\boldsymbol{snd}$ を練習問題 3.5 のように定義し，$\boldsymbol{p}$ を項 $\boldsymbol{pair}$ `nat bool O true` とする．このとき，

$$\boldsymbol{fst}\ \texttt{nat bool}\ \boldsymbol{p} \longrightarrow \boldsymbol{M_1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \boldsymbol{M_n}$$

となる $\boldsymbol{M_i}$ (ただし $\boldsymbol{M_n}$ は正規形とする) を列挙せよ．また，

$$\boldsymbol{snd}\ \texttt{nat bool}\ \boldsymbol{p} \longrightarrow \boldsymbol{N_1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \boldsymbol{N_m}$$

となる $\boldsymbol{N_i}$ (ただし $\boldsymbol{N_m}$ は正規形とする) を列挙せよ．

4 命題論理

練習問題 4.1 命題論理の導出規則を使って以下の判断の導出を書け．命題 $\neg \boldsymbol{P}$ は $\boldsymbol{P}$ -> $\perp$ の略記である．

1. $\vdash \boldsymbol{p}$ -> $\boldsymbol{q}$ -> $\boldsymbol{p}$
2. $\vdash (\boldsymbol{p}$ -> $\boldsymbol{q}$ -> $\boldsymbol{r})$ -> $(\boldsymbol{p}$ -> $\boldsymbol{q})$ -> $\boldsymbol{p}$ -> $\boldsymbol{r}$
3. $\vdash \boldsymbol{p}$ -> $\neg\neg\boldsymbol{p}$
4. $\vdash \neg\neg\neg\boldsymbol{p}$ -> $\neg\boldsymbol{p}$
5. $\vdash (\boldsymbol{p}$ -> $\boldsymbol{q})$ -> $(\neg\boldsymbol{q}$ -> $\neg\boldsymbol{p})$
6. $\vdash \neg(\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q})$ -> $(\neg\boldsymbol{p} \wedge \neg\boldsymbol{q})$
7. $\vdash (\neg\boldsymbol{p} \wedge \neg\boldsymbol{q})$ -> $\neg(\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q})$
8. $\vdash (\boldsymbol{p}$ -> $\boldsymbol{q}$ -> $\boldsymbol{r})$ -> $(\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q}$ -> $\boldsymbol{r})$
9. $\vdash (\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q}$ -> $\boldsymbol{r})$ -> $(\boldsymbol{p}$ -> $\boldsymbol{q}$ -> $\boldsymbol{r})$
10. $\vdash \neg\neg(\boldsymbol{p} \vee \neg\boldsymbol{p})$
11. $\vdash (\boldsymbol{p} \vee \neg\boldsymbol{p})$ -> $\neg\neg\boldsymbol{p}$ -> $\boldsymbol{p}$
12. $\vdash (\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q}) \wedge \boldsymbol{r}$ -> $(\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{r}) \vee (\boldsymbol{q} \wedge \boldsymbol{r})$
13. $\vdash (\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q}) \vee \boldsymbol{r}$ -> $(\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{r}) \wedge (\boldsymbol{q} \vee \boldsymbol{r})$
14. $\vdash (\boldsymbol{p}$ -> $\boldsymbol{r}) \wedge (\boldsymbol{q}$ -> $\boldsymbol{r})$ -> $(\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q}$ -> $\boldsymbol{r})$
15. $\vdash \neg(\boldsymbol{p} \wedge \neg\boldsymbol{p})$
16. $\vdash (\neg\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q})$ -> $(\boldsymbol{p}$ -> $\boldsymbol{q})$

5 述語論理

練習問題 5.1 単純型付ラムダ計算 (+命題論理) に関する論理の導出規則を使って以下の判断の導出を書け．ただし `P`, `Q` は `nat -> Prop` 型の変数，`R` は `Prop` 型の変数とする．(文脈からも省略する．) 途中，出てくる $\boldsymbol{\Gamma} \vdash \boldsymbol{P}$: `Prop` の形の判断についての導出は省略してよい．また型宣言 (: T) は適宜省略する．

1. $\vdash (\forall \texttt{x,P x})\ \texttt{->}\ (\exists \texttt{y,P y})$
2. $\vdash (\neg\exists \texttt{x,P x})\ \texttt{->}\ \forall \texttt{y,}\neg\texttt{P y}$
3. $\vdash (\forall \texttt{x,}\neg\texttt{P x})\ \texttt{->}\ \neg\exists \texttt{y,P y}$
4. $\vdash (\forall \texttt{x,}(\texttt{P x -> Q x}))\ \texttt{->}\ ((\forall \texttt{y,P y})\ \texttt{->}\ \forall \texttt{z,Q z})$
5. $\vdash (\forall \texttt{x,}(\texttt{P x -> Q x}))\ \texttt{->}\ ((\exists \texttt{y,P y})\ \texttt{->}\ \exists \texttt{z,Q z})$
6. $\vdash (\forall \texttt{x,}(\texttt{P x} \wedge \texttt{Q x}))\ \texttt{->}\ (\forall \texttt{y,P y}) \wedge (\forall \texttt{z,Q z})$
7. $\vdash (\forall \texttt{x,P x} \vee \neg\texttt{P x}) \wedge (\neg\neg\forall \texttt{y,P y})\ \texttt{->}\ \forall \texttt{z,P z}$
8. $\vdash (\exists \texttt{x,P x} \vee \texttt{Q x})\ \texttt{->}\ (\exists \texttt{y,P y}) \vee (\exists \texttt{x,Q x})$
9. $\vdash (\forall \texttt{x,P x -> R})\ \texttt{->}\ (\exists \texttt{y,P y})\ \texttt{->}\ \texttt{R}$
10. $\vdash ((\exists \texttt{y,P y})\ \texttt{->}\ \texttt{R})\ \texttt{->}\ (\forall \texttt{x,P x -> R})$

6 日本語による証明

練習問題 6.1 以下の命題を (日本語で) 証明せよ．(ただし，命題や関数の意味は Coq での定義によるとする．)

1. $\forall \texttt{X} : \texttt{Type,}\forall \texttt{x y} : \texttt{list X,length(x ++ y)} = \texttt{length x + length y}$ を示せ.
2. `bool` 上の排他的論理和を計算する関数 `xorb` を定義し，$\forall \texttt{b c} : \texttt{bool,xorb b c} = \texttt{andb b c->}$ $\texttt{b = false} \wedge \texttt{c = false}$ を示せ.
3. $\forall \texttt{x y} : \texttt{nat,ev x -> ev y -> ev (x + y)}$ を `ev x` の導出に関する帰納法で示せ.
4. $\forall \texttt{x} : \texttt{nat,}\forall \texttt{y} : \texttt{nat,}(\texttt{x} = \texttt{y} \vee \neg(\texttt{x} = \texttt{y}))$ を `x` についての帰納法を使って示せ.