

「計算と論理」 Software Foundations その8

五十嵐 淳

igarashi@kuis.kyoto-u.ac.jp

京都大学

January 14, 2014

本日のメニュー

MoreLogic.v (続・Coq の論理)

- 特称量化 (「ある x が存在して ~」)

特称量化

「型 X の要素 x が存在して P 」 ($\exists x : X.P$) の定義:

```
Inductive ex (X:Type) (P : X->Prop) : Prop :=  
  ex_intro : forall (witness:X),  
    P witness -> ex X P.
```

- 直観: $\text{ex } X P$ の証拠は型 X の要素 **witness** と P **witness** の証拠の組
 - ▶ 存在証明には「何が」存在するかを実際に示す

自然演繹における導出規則

$$\frac{\Gamma, x : T \vdash P : \text{Prop}}{\Gamma \vdash \exists x : T, P : \text{Prop}} \quad (\text{P-}\exists)$$

$$\frac{\Gamma \vdash e : T \quad \Gamma \vdash P[e]}{\Gamma \vdash \exists x : T, P[x]} \quad (\exists\text{-I})$$

$$\frac{\Gamma \vdash \exists x : T, P[x] \quad \Gamma, x : T, H : P[x] \vdash Q \quad \Gamma \vdash Q : \text{Prop}}{\Gamma \vdash Q} \quad (\exists\text{-E})$$

特称量化に関する証明(1)

witness を指定して `apply ex_intro` を使う

```
Example exists_example_1 :  
  exists n, n + (n * n) = 6.
```

Proof.

```
  apply ex_intro with (witness:=2).  
  reflexivity. Qed.
```

- `apply ex_intro with (witness:= e)` の代わりに `exists e` でも OK

特称量化に関する証明(2)

文脈に特称量化がある時は `destruct` (か `inversion`) を使う

```
Theorem exists_example_2 : forall n,  
  (exists m, n = 4 + m) ->  
  (exists o, n = 2 + o).
```

Proof.

```
intros n H. destruct H as [m Hm].  
  (* witness に intro パターンで名前をつける  
  (* m が実際に何かはわからないが  
      Hm : n = 4 + m は満たす *)  
exists (2 + m).  
apply Hm. Qed.
```

直観主義論理と特称量化

- Coq の論理では $\exists x, \neg P$ と $\neg(\forall x, P)$ は同値ではない! (dist_not_exists, not_exists_dist 参照)
 - ▶ 前者ならば後者, のみ成立
 - ★ 古典論理ではどちらも同値
 - ▶ $\forall x, \neg P$ と $\neg(\exists x, P)$ は同値
 - ▶ $\forall x, P$ と $\neg(\exists x, \neg P)$ ではどうか?
 - ▶ $\exists x, P$ と $\neg(\forall x, \neg P)$ ではどうか?
- その他
 - ▶ $(\forall x, (P \vee \neg P)) \rightarrow (\exists x, P) \vee (\forall x, \neg P)$ も成り立ちそうで(?)成り立たない
 - ★ が古典論理では成立

宿題：1/21 午前10:30 締切

- Exercise: `dist_not_exists` (1), `dist_exists_or` (2)
- 解答を書き込んだ `MoreLogic.v` までのファイルを全てをオンライン提出システムを通じて提出
- 以下をコメント欄に明記:
 - ▶ 講義・演習に関する質問，わかりにくいと感じたこと，その他気になること．（「特になし」はダメです．）
 - ▶ 友達に教えてもらったなら、その人の名前，他の資料（web など）を参考にした場合，その情報源（URL など）．