# 工学部専門科目「計算と論理」配布資料
# 練習問題集と期末試験について

五十嵐 淳
京都大学 大学院情報学研究科 通信情報システム専攻
igarashi@kuis.kyoto-u.ac.jp

January 14, 2013

## 演習の進め方

0. 予め練習問題を解いておく
1. 練習問題の解答を (問題番号・氏名とともに) 白板に書く
2. 教員による講評
3. 1., 2. を繰り返す.

- 問題の順番は問わない.
- 問題の解答は早い者勝ちとするが，同時に解答を開始するのは構わない.
- 正答した場合は成績へ加える.

## 1　単純型付ラムダ計算

**練習問題 1.1** 項

$$M = \texttt{if true then (fun n} : \texttt{nat => plus n n) (S 0) else (fun n} : \texttt{nat => n) 0}$$

とする．$M$ は以下の 3 つの項

$$\begin{array}{rcl} M_1 & = & \texttt{(fun n} : \texttt{nat => plus n n) (S 0)} \\ M_2 & = & \texttt{if true then plus (S 0) (S 0) else (fun n} : \texttt{nat => n) 0} \\ M_3 & = & \texttt{if true then (fun n} : \texttt{nat => plus n n) (S 0) else 0} \end{array}$$

に簡約されうるが，$M \longrightarrow M_i$ (ただし $i = 1, 2, 3$) の導出木をそれぞれ書け.

**練習問題 1.2** Basics.v に登場した plus 関数を fix を使った項 $\boldsymbol{M}_{plus}$ で表し，$\boldsymbol{M}_{plus}$ (S O) (S O) が簡約されて S (S O) になる過程を，$\boldsymbol{M}_{plus}$ (S O) (S O) $\longrightarrow \boldsymbol{M_1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \boldsymbol{M_n} \longrightarrow$ S (S O) なる $\boldsymbol{M_i}$ を列挙することで示せ．

**練習問題 1.3** $\boldsymbol{M}$ を `fix f (x : nat) : nat := match x with O => O | S y => S (S (f y)) end` とする．

$$\boldsymbol{M}\ \texttt{(S (S O))} \longrightarrow \boldsymbol{M_1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \boldsymbol{M_n}$$

(ただし $\boldsymbol{M_n}$ は S (S (...O)...) の形) となる $\boldsymbol{M_i}$ を列挙せよ．

**練習問題 1.4** 以下の単純型付ラムダ計算の型付け関係の判断について，判断が導出できるような項 $\boldsymbol{M}$ を見つけ，導出を書け．ただし，$\boldsymbol{S}, \boldsymbol{T}, \boldsymbol{U}$ は型とする．

1. $\vdash \boldsymbol{M} : \boldsymbol{S} \texttt{->} \boldsymbol{T} \texttt{->} \boldsymbol{S}$
2. $\vdash \boldsymbol{M} : (\boldsymbol{S} \texttt{->} \boldsymbol{T} \texttt{->} \boldsymbol{U}) \texttt{->} (\boldsymbol{S} \texttt{->} \boldsymbol{T}) \texttt{->} \boldsymbol{S} \texttt{->} \boldsymbol{U}$
3. $\vdash \boldsymbol{M} : (\boldsymbol{S} \texttt{->} \boldsymbol{T} \texttt{->} \boldsymbol{U}) \texttt{->} (\boldsymbol{S} * \boldsymbol{T} \texttt{->} \boldsymbol{U})$
4. $\vdash \boldsymbol{M} : (\boldsymbol{S} * \boldsymbol{T} \texttt{->} \boldsymbol{U}) \texttt{->} (\boldsymbol{S} \texttt{->} \boldsymbol{T} \texttt{->} \boldsymbol{U})$

## 2 多相ラムダ計算

$\boldsymbol{id}$ を項 `fun X : Type => fun x : X => x` とする．

**練習問題 2.1**

$$\boldsymbol{id}\ (\texttt{nat} \texttt{->} \texttt{nat})\ \texttt{S}\ (\boldsymbol{id}\ \texttt{nat}\ \texttt{O}) \longrightarrow \boldsymbol{M_1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \boldsymbol{M_n}$$

(ただし $\boldsymbol{M_n}$ は S (S (...O)...) の形) となる $\boldsymbol{M_i}$ を列挙せよ．

**練習問題 2.2** 以下の多相ラムダ計算の型付け関係の判断について，判断が導出できるような型 $\boldsymbol{T}$ を見つけ，導出を書け．

1. $\vdash$ `fun` $X$ : `Type => fun` $x$ : $X$ `=> fun` $y$ : $X$ `=>` $x$ : $\boldsymbol{T}$
2. $\vdash \boldsymbol{id}\ (\forall \texttt{Y : Type}, \texttt{Y -> Y})\ \boldsymbol{id} : \boldsymbol{T}$

## 3 命題論理

**練習問題 3.1** 命題論理の導出規則を使って以下の判断の導出を書け．命題 $\neg \boldsymbol{P}$ は $\boldsymbol{P} \texttt{->} \perp$ の略記である．

1. $\vdash \boldsymbol{p} \texttt{->} \boldsymbol{q} \texttt{->} \boldsymbol{p}$
2. $\vdash (\boldsymbol{p} \texttt{->} \boldsymbol{q} \texttt{->} \boldsymbol{r}) \texttt{->} (\boldsymbol{p} \texttt{->} \boldsymbol{q}) \texttt{->} \boldsymbol{p} \texttt{->} \boldsymbol{r}$

3. $\vdash \boldsymbol{p}$ -> $\neg\neg\boldsymbol{p}$

4. $\vdash \neg\neg\neg\boldsymbol{p}$ -> $\neg\boldsymbol{p}$

5. $\vdash (\boldsymbol{p}$ -> $\boldsymbol{q})$ -> $(\neg\boldsymbol{q}$ -> $\neg\boldsymbol{p})$

6. $\vdash \neg(\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q})$ -> $(\neg\boldsymbol{p} \wedge \neg\boldsymbol{q})$

7. $\vdash (\neg\boldsymbol{p} \wedge \neg\boldsymbol{q})$ -> $\neg(\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q})$

8. $\vdash (\boldsymbol{p}$ -> $\boldsymbol{q}$ -> $\boldsymbol{r})$ -> $(\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q}$ -> $\boldsymbol{r})$

9. $\vdash (\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q}$ -> $\boldsymbol{r})$ -> $(\boldsymbol{p}$ -> $\boldsymbol{q}$ -> $\boldsymbol{r})$

10. $\vdash \neg\neg(\boldsymbol{p} \vee \neg\boldsymbol{p})$

11. $\vdash (\boldsymbol{p} \vee \neg\boldsymbol{p})$ -> $\neg\neg\boldsymbol{p}$ -> $\boldsymbol{p}$

12. $\vdash (\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q}) \wedge \boldsymbol{r}$ -> $(\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{r}) \vee (\boldsymbol{q} \wedge \boldsymbol{r})$

13. $\vdash (\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q}) \vee \boldsymbol{r}$ -> $(\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{r}) \wedge (\boldsymbol{q} \vee \boldsymbol{r})$

14. $\vdash (\boldsymbol{p}$ -> $\boldsymbol{r}) \wedge (\boldsymbol{q}$ -> $\boldsymbol{r})$ -> $(\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q}$ -> $\boldsymbol{r})$

15. $\vdash \neg(\boldsymbol{p} \wedge \neg\boldsymbol{p})$

16. $\vdash (\neg\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q})$ -> $(\boldsymbol{p}$ -> $\boldsymbol{q})$

## 4 述語論理 (単純型付ラムダ計算に関する論理)

特称量化に関する規則は以下のように与えられる．

$$\frac{\boldsymbol{\Gamma}, \boldsymbol{x} : \boldsymbol{T} \vdash \boldsymbol{P} : \texttt{Prop}}{\boldsymbol{\Gamma} \vdash \exists \boldsymbol{x} : \boldsymbol{T}, \boldsymbol{P} : \texttt{Prop}} \qquad (\exists\mathrm{P})$$

$$\frac{\boldsymbol{\Gamma} \vdash \boldsymbol{P}[\boldsymbol{M}] \qquad \boldsymbol{\Gamma} \vdash \boldsymbol{M} : \boldsymbol{T}}{\boldsymbol{\Gamma} \vdash \exists \boldsymbol{x} : \boldsymbol{T}, \boldsymbol{P}[\boldsymbol{x}]} \qquad (\exists\mathrm{I})$$

$$\frac{\boldsymbol{\Gamma} \vdash \exists \boldsymbol{x} : \boldsymbol{T}, \boldsymbol{P}[\boldsymbol{x}] \qquad \boldsymbol{\Gamma}, \boldsymbol{x} : \boldsymbol{T}, \boldsymbol{H} : \boldsymbol{P}[\boldsymbol{x}] \vdash \boldsymbol{R} \qquad \boldsymbol{\Gamma} \vdash \boldsymbol{R} : \texttt{Prop}}{\boldsymbol{\Gamma} \vdash \boldsymbol{R}} \qquad (\exists\mathrm{E})$$

**練習問題 4.1** 単純型付ラムダ計算 (+命題論理) に関する論理の導出規則を使って以下の判断の導出を書け．ただし `P`, `Q` は `nat -> Prop` 型の変数，`R` は `Prop` 型の変数とする．(文脈からも省略する．) 途中，出てくる $\boldsymbol{\Gamma} \vdash \boldsymbol{P} : \texttt{Prop}$ の形の判断についての導出は省略してよい．また型宣言 $( : T)$ は適宜省略する．

1. $\vdash$ (∀`x`,`P x`) -> (∃`y`,`P y`)

2. $\vdash (\neg\exists \texttt{x},\texttt{P x})$ -> $\forall \texttt{y},\neg\texttt{P y}$
3. $\vdash (\forall \texttt{x},\neg\texttt{P x})$ -> $\neg\exists \texttt{y},\texttt{P y}$
4. $\vdash (\forall \texttt{x},(\texttt{P x} \texttt{->} \texttt{Q x})) \texttt{->} ((\forall \texttt{y},\texttt{P y}) \texttt{->} \forall \texttt{z},\texttt{Q z})$
5. $\vdash (\forall \texttt{x},(\texttt{P x} \texttt{->} \texttt{Q x})) \texttt{->} ((\exists \texttt{y},\texttt{P y}) \texttt{->} \exists \texttt{z},\texttt{Q z})$
6. $\vdash (\forall \texttt{x},(\texttt{P x} \wedge \texttt{Q x})) \texttt{->} (\forall \texttt{y},\texttt{P y}) \wedge (\forall \texttt{z},\texttt{Q z})$
7. $\vdash (\forall \texttt{x},\texttt{P x} \vee \neg\texttt{P x}) \wedge (\neg\neg\forall \texttt{y},\texttt{P y}) \texttt{->} \forall \texttt{z},\texttt{P z}$
8. $\vdash (\exists \texttt{x},\texttt{P x} \vee \texttt{Q x}) \texttt{->} (\exists \texttt{y},\texttt{P y}) \vee (\exists \texttt{x},\texttt{Q x})$
9. $\vdash (\forall \texttt{x},\texttt{P x} \texttt{->} \texttt{R}) \texttt{->} (\exists \texttt{y},\texttt{P y}) \texttt{->} \texttt{R}$
10. $\vdash ((\exists \texttt{y},\texttt{P y}) \texttt{->} \texttt{R}) \texttt{->} (\forall \texttt{x},\texttt{P x} \texttt{->} \texttt{R})$

## 5 日本語による証明

**練習問題 5.1** 以下の命題を (日本語で) 証明せよ．(ただし，命題や関数の意味は Coq での定義によるとする．)

1. $\forall \texttt{X} : \texttt{Type},\forall \texttt{x y} : \texttt{list X},\texttt{length(x ++ y)} = \texttt{length x + length y}$ を示せ.
2. `bool` 上の排他的論理和を計算する関数 `xorb` を定義し，$\forall \texttt{b c} : \texttt{bool},\neg(\texttt{xorb b c} \neq \texttt{orb b c})\texttt{->}$ $\texttt{b = false} \wedge \texttt{c = false}$ を示せ.
3. $\forall \texttt{x y} : \texttt{nat},\texttt{ev x} \texttt{->} \texttt{ev y} \texttt{->} \texttt{ev (x + y)}$ を `ev x` の導出に関する帰納法で示せ.
4. $\forall \texttt{x} : \texttt{nat},\forall \texttt{y} : \texttt{nat},(\texttt{x} = \texttt{y} \vee \neg(\texttt{x} = \texttt{y}))$ を `x` についての帰納法を使って示せ.

## 6 期末試験について

- Coq のプログラム (型・命題定義，関数定義) は書ける必要あり
- Coq のタクティックを使った証明は書けなくてよい
- (日本語の) 非形式的証明は書ける必要あり
- 導出は書ける必要あり
- 「公式カンニングペーパー」1 枚 (1/21 に配布) の持ち込みを認める.