含意・全称量化以外の論理結合子

五十嵐 淳
京都大学 大学院情報学研究科 通信情報システム専攻
igarashi@kuis.kyoto-u.ac.jp

January 8, 2013

以下は算術や単純型付ラムダ計算の論理に対して加える「かつ」「または」「矛盾」「ある〜について」についての規則をまとめたものである.

1　判断 $\Gamma \vdash P : \mathtt{Prop}$ の規則

$$\frac{\Gamma \vdash P : \mathtt{Prop} \qquad \Gamma \vdash Q : \mathtt{Prop}}{\Gamma \vdash P \wedge Q : \mathtt{Prop}} \tag{P-$\wedge$}$$

$$\frac{\Gamma \vdash P : \mathtt{Prop} \qquad \Gamma \vdash Q : \mathtt{Prop}}{\Gamma \vdash P \vee Q : \mathtt{Prop}} \tag{P-$\vee$}$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash \bot : \mathtt{Prop}} \tag{P-$\bot$}$$

$$\frac{\Gamma, x : T \vdash P : \mathtt{Prop}}{\Gamma \vdash \exists x : T, P : \mathtt{Prop}} \tag{P-$\exists$}$$

2　判断 $\Gamma \vdash P$ の規則

$$\frac{\Gamma \vdash P \qquad \Gamma \vdash Q}{\Gamma \vdash P \wedge Q} \tag{$\wedge$-I}$$

$$\frac{\Gamma \vdash P \wedge Q}{\Gamma \vdash P} \tag{$\wedge$-E1}$$

$$\frac{\Gamma \vdash P \wedge Q}{\Gamma \vdash Q} \tag{$\wedge$-E2}$$

$$\frac{\boldsymbol{\Gamma} \vdash \boldsymbol{P}}{\boldsymbol{\Gamma} \vdash \boldsymbol{P} \vee \boldsymbol{Q}} \tag{$\vee$-I1}$$

$$\frac{\boldsymbol{\Gamma} \vdash \boldsymbol{Q}}{\boldsymbol{\Gamma} \vdash \boldsymbol{P} \vee \boldsymbol{Q}} \tag{$\vee$-I2}$$

$$\frac{\boldsymbol{\Gamma} \vdash \boldsymbol{P} \vee \boldsymbol{Q} \qquad \boldsymbol{\Gamma}, \boldsymbol{H} : \boldsymbol{P} \vdash \boldsymbol{R} \qquad \boldsymbol{\Gamma}, \boldsymbol{H} : \boldsymbol{Q} \vdash \boldsymbol{R}}{\boldsymbol{\Gamma} \vdash \boldsymbol{R}} \tag{$\vee$-E}$$

$$\frac{\boldsymbol{\Gamma} \vdash \bot}{\boldsymbol{\Gamma} \vdash \boldsymbol{P}} \tag{$\bot$-E}$$

$$\frac{\boldsymbol{\Gamma} \vdash \boldsymbol{e} : \boldsymbol{T} \qquad \boldsymbol{\Gamma} \vdash \boldsymbol{P}[\boldsymbol{e}]}{\boldsymbol{\Gamma} \vdash \exists \boldsymbol{x} : \boldsymbol{T}, \boldsymbol{P}[\boldsymbol{x}]} \tag{$\exists$-I}$$

$$\frac{\boldsymbol{\Gamma} \vdash \exists \boldsymbol{x} : \boldsymbol{T}, \boldsymbol{P}[\boldsymbol{x}] \qquad \boldsymbol{\Gamma}, \boldsymbol{x} : \boldsymbol{T}, \boldsymbol{H} : \boldsymbol{P}[\boldsymbol{x}] \vdash \boldsymbol{Q} \qquad \boldsymbol{\Gamma} \vdash \boldsymbol{Q} : \texttt{Prop}}{\boldsymbol{\Gamma} \vdash \boldsymbol{Q}} \tag{$\exists$-E}$$

3 演習問題

3.1 命題論理

問題 算術の導出規則を使って以下の判断の導出を書け．ただし P, Q, R は `Prop` 型の変数とする (文脈には書く必要はない)．$\neg P$ は P `->` $\bot$ の略記である．途中，出てくる $\mathbf{\Gamma} \vdash \boldsymbol{P}$: `Prop` の形の判断についての導出は省略してよい．

1. $\vdash P$ `->` Q `->` P
2. $\vdash (P$ `->` Q `->` $R)$ `->` $(P$ `->` $Q)$ `->` P `->` R
3. $\vdash P$ `->` $\neg\neg P$
4. $\vdash \neg\neg\neg P$ `->` $\neg P$
5. $\vdash (P$ `->` $Q)$ `->` $(\neg Q$ `->` $\neg P)$
6. $\vdash \neg(P \vee Q)$ `->` $(\neg P \wedge \neg Q)$
7. $\vdash (\neg P \wedge \neg Q)$ `->` $\neg(P \vee Q)$
8. $\vdash (P$ `->` Q `->` $R)$ `->` $(P \wedge Q$ `->` $R)$
9. $\vdash (P \wedge Q$ `->` $R)$ `->` $(P$ `->` Q `->` $R)$
10. $\vdash \neg\neg(P \vee \neg P)$
11. $\vdash (P \vee \neg P)$ `->` $\neg\neg P$ `->` P
12. $\vdash (P \vee Q) \wedge R$ `->` $(P \wedge R) \vee (Q \wedge R)$
13. $\vdash (P$ `->` $R) \wedge (Q$ `->` $R)$ `->` $(P \vee Q$ `->` $R)$
14. $\vdash \neg(P \wedge \neg P)$

3.2 述語論理

問題 算術の導出規則を使って以下の判断の導出を書け．ただし P, Q は `nat -> Prop` 型の変数，R は `Prop` 型の変数とする．(文脈からも省略する．) 途中，出てくる $\mathbf{\Gamma} \vdash \boldsymbol{P}$: `Prop` の形の判断についての導出は省略してよい．また型宣言 (: T) は適宜省略する．

1. $\vdash (\forall x, P\ x)$ `->` $(\exists y, P\ y)$
2. $\vdash (\neg\exists x, P\ x)$ `->` $\forall y, \neg P\ y$
3. $\vdash (\forall x, \neg P\ x)$ `->` $\neg\exists y, P\ y$
4. $\vdash (\forall x, (P\ x$ `->` $Q\ x))$ `->` $((\forall y, P\ y)$ `->` $\forall z, Q\ z)$

5. $\vdash (\forall x, (P\ x \texttt{->} Q\ x)) \texttt{->} ((\exists y, P\ y) \texttt{->} \exists z, Q\ z)$

6. $\vdash (\forall x, (P\ x \wedge Q\ x)) \texttt{->} (\forall y, P\ y) \wedge (\forall z, Q\ z)$

7. $\vdash (\forall x, P\ x \vee \neg P\ x) \wedge (\neg\neg\forall y, P\ y) \texttt{->} \forall z, P\ z$

8. $\vdash (\exists x, P\ x \vee Q\ x) \texttt{->} (\exists y, P\ y) \vee (\exists x, Q\ x)$

9. $\vdash (\forall x, P\ x \texttt{->} R) \texttt{->} (\exists y, P\ y) \texttt{->} R$

10. $\vdash ((\exists y, P\ y) \texttt{->} R) \texttt{->} (\forall x, P\ x \texttt{->} R)$

3.3 算術

問題 算術の導出規則を使って以下の判断の導出を書け.

1. $\vdash \forall x, \forall y, (x = y \vee \neg(x = y))$

3.4 単純型付ラムダ計算

問題 以下の単純型付ラムダ計算の判断について，判断が導出できるような項 $\boldsymbol{e}$ を見つけ，導出を書け．ただし，S, T, U は型とする．

1. $\vdash \boldsymbol{e} : S \texttt{->} T \texttt{->} S$

2. $\vdash \boldsymbol{e} : (S \texttt{->} T \texttt{->} U) \texttt{->} (S \texttt{->} T) \texttt{->} S \texttt{->} U$

3. $\vdash \boldsymbol{e} : (S \texttt{->} T \texttt{->} U) \texttt{->} (S * T \texttt{->} U)$

4. $\vdash \boldsymbol{e} : (S * T \texttt{->} U) \texttt{->} (S \texttt{->} T \texttt{->} U)$

5. $(\texttt{fun}\ x : \texttt{nat => fun}\ y : \texttt{nat =>}\ x)\ (\texttt{S 0})\ \texttt{0} \longrightarrow \boldsymbol{e}$

問題 $\boldsymbol{e}$ を `fix f (x : nat) : nat := match x with O => O | S y => S (S (f y)) end` とする．

$$\boldsymbol{e}\ \texttt{(S (S O))} \longrightarrow \boldsymbol{e_1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \boldsymbol{e_n}$$

(ただし $\boldsymbol{e_n}$ は `S (S (...O)...)` の形) となる $\boldsymbol{e_i}$ を列挙せよ.